

1903.

N 8a.

ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POCHENDORF, G. UND E. WIEDENMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 11. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 816. BAND 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSPEKTION VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1903.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 36 M.*

(Ausgegeben am 30. Juni 1903.)

Inhalt.

| | Seite |
|--|-------|
| 1. Gustav Mie. Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper | 687 |
| 2. Gottlieb Kučera. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber | 698 |
| 3. F. Pockels. Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen | 726 |
| 4. Philip Ely Robinson. Der elektrische Widerstand loser Kontakte und Resonanzversuche mit dem Kohärer | 754 |
| 5. Richard Gans. Über Volumenänderung von Gasen durch dielektrische Polarisation | 797 |
| 6. Max Seddig. Darstellung des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien, und insbesondere ihrer Richtungsänderungen durch Dielektrika. (Hierzu Taf. IV.) | 815 |
| 7. W. König. Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. (Hierzu Taf. V.) | 842 |
| 8. J. Zenneck. Nachtrag zu meiner Arbeit über die „Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern“ | 867 |
| 9. Ernst Ruhmer. Bemerkung zur Notiz der Herren V. Gabritschewski und A. Batschinski über die sprechende Flamme | 872 |
| Berichtigungen zur Arbeit Eichenwald | 872 |



Soeben wurde das dritte Heft des ersten Jahrganges der neuen

Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie

ausgegeben.

Die Zeitschrift wird unter besonderer Mitwirkung von Professor H. Kayser in Bonn herausgegeben von Dr. Englisch-Stuttgart und Dr. Schaum-Marburg und soll neben der eigentlichen wissenschaftlichen Photographie alle Erscheinungen, die mit der Physik und Chemie der Strahlung zusammenhängen, ganz besonders aber die Spektroskopie, in den Bereich ihrer Betrachtung ziehen. Abonnementspreis für den aus 12 Heften bestehenden Band 20 Mark.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

1. Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper; von Gustav Mie.

1. In seinen berühmten Untersuchungen über die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes hat van der Waals die Hypothese eingeführt, daß die Moleküle eines flüssigen Körpers im wesentlichen dieselben Bewegungen ausführen, wie die eines gasförmigen, dessen Moleküle den Raum sehr dicht erfüllen. Diese Hypothese ist, soweit mir bekannt ist, in allen späteren Untersuchungen über die kinetische Theorie der Flüssigkeiten und speziell die Theorie der Verdampfung beibehalten worden. Es sind hier zu nennen die Arbeiten von G. Jäger ¹⁾, W. Voigt ²⁾, C. Dieterici ³⁾, H. Kamerlingh-Onnes. ⁴⁾ Auch die sehr tief gehenden Untersuchungen von L. Boltzmann ⁵⁾ über die Dampfdruckkurve beruhen ganz auf der van der Waals'schen Hypothese.

Wenn nun diese Hypothese richtig wäre, so müßte die Molekularwärme eines Dampfes immer gleich der seiner Flüssigkeit sein. Das ist aber keineswegs der Fall. So ist z. B. die spezifische Wärme des Quecksilbers etwa doppelt so groß, wie die seines Dampfes, die des Wassers sogar dreimal so groß. Es kann also die van der Waals'sche Hypothese nicht allgemein richtig sein, und ebenso auch die Theorien der Flüssigkeiten, die auf ihr beruhen.

Andererseits sind aber die Molekularbewegungen in den Flüssigkeiten jedenfalls zu kompliziert, als daß es beim heutigen

1) G. Jäger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien Math.-phys. Kl. IIa. 99. p. 681. 861. 1890.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. Math.-phys. Kl. p. 341. 1896; p. 19. 261. 1897.

3) C. Dieterici, Wied. Ann. 66. p. 826. 1898.

4) H. Kamerlingh-Onnes, Arch. Néerland. 30. p. 101. 1897.

5) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 2. p. 167. 1898.

Stande unserer Kenntnisse von den Molekülen möglich wäre, ohne vereinfachende Annahmen an ihr Studium zu gehen. Es schien mir deshalb nicht unnötig, einmal gerade vom entgegengesetzten Standpunkt auszugehen, wie die eben zitierten Untersuchungen, und die Flüssigkeiten im wesentlichen den festen Körpern gleich zu setzen. In der Tat spricht bei den einatomigen Körpern, d. h. den Metallen, auf die ich mich im folgenden beschränken werde, vieles für diese Hypothese. Das geschmolzene Metall unterscheidet sich vom festen in allen seinen Eigenschaften sehr wenig. Dichtigkeit, Ausdehnungskoeffizient und vor allem spezifische Wärme ändern sich durch das Schmelzen nur um einige Prozente. Allein die unendlich viel größere Plastizität hat das flüssige Metall vor dem festen voraus. Dagegen besteht zwischen flüssigem Metall und Metaldampf eine scharfe Diskontinuität, besonders auch in den Werten der spezifischen Wärme, die im Dampf auf die Hälfte heruntergeht. Es wird sich freilich zeigen, daß man auf dem von mir eingeschlagenen Wege nur eine sehr rohe Annäherung gewinnt. Aber ich glaube, daß man auch zugleich erkennen wird, in welcher Weise die Theorie vervollständigt werden muß, wenn sie die Tatsachen besser wiedergeben soll.

Die Dampfdruckkurve.

2. Man kann die Dampfdruckkurve angenähert auf einem rein thermodynamischen Wege berechnen.¹⁾ Es sei q die Verdampfungswärme einer Substanz, gemessen pro Grammmolekül. Sie setzt sich aus zwei Summanden zusammen, nämlich erstens derjenigen Energie Q , welche die Substanz selbst bei der Änderung ihres Aggregatzustandes aufnimmt, zweitens derjenigen Energie, die infolge der Volumenvergrößerung der Substanz unter Wirkung eines Druckes (des Dampfdruckes) nach außen abgegeben wird. Da man die Verdampfungswärme stets bei konstant gehaltenem Druck p mißt, so ist die nach außen abgegebene Energie $p \cdot (v_G - v_F)$, wo v_G und v_F das Volumen eines Grammmoleküls im gasförmigen und im flüssigen Zustande beim Drucke p bedeuten. Da wir nur Annäherungsformeln suchen, so können wir v_F gegen v_G vernachlässigen und den Dampf als ideales Gas ansehen. Die gesuchte Arbeit

1) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 177. 1882.

ist also $p \cdot v_G = R \cdot \Theta$, wo R die Gaskonstante, Θ die absolute Temperatur, bei der verdampft wird, bedeuten.

Satz 1. Die „innere Verdampfungsenergie“ Q und die „totale Verdampfungsenergie“ q stehen in der Beziehung zueinander:

$$(1) \quad q = Q + R \cdot \Theta.$$

Durch Anwendung der beiden Hauptsätze auf einen besonderen Kreisprozeß, den zuerst Hertz in der zitierten Abhandlung benutzt hat, bekommt man einen zweiten Satz.

Satz 2. Die innere Verdampfungsenergie Q eines Körpers ändert sich nahezu linear mit der Temperatur, es ist:

$$(2) \quad Q = Q_0 - (c_F - c_G) \cdot \Theta,$$

wo Q_0 eine mit der Temperatur nur sehr wenig variierende Größe bedeutet und c_F und c_G die spezifischen Wärmen der Flüssigkeit und des Dampfes pro Grammolekül sind, beide bei konstantem Volumen.

Da man bei Flüssigkeiten immer die spezifische Wärme bei konstantem Druck mißt, sei hier die Formel¹⁾ hingeschrieben, nach der man sie umrechnen muß:

$$(3) \quad c_{Fv} = c_{Fp} - \frac{v_F \cdot \alpha^2}{\kappa} \cdot \Theta.$$

Hier bedeutet v_F das Volumen eines Grammoleküls, α den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, κ die Kompressibilität. Rechnen wir hier κ in 1/Atm. (1 Atm. = 1 kg/qcm = 735,5 mm Hg) und v_F in ccm, so haben wir als Einheit der Energie natürlich nicht die Kalorie, sondern das Kilogrammzentimeter zu nehmen (1 cal = 42,7 kgcm). In diesem Maßsystem ist die Gaskonstante $R = 84,8$.

Durch einen zweiten Kreisprozeß findet man, wie ebenfalls Hertz gezeigt hat, die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur, d. h. die Dampfdruckkurve.

Satz 3. Kennt man die Verdampfungswärme einer Substanz, so tritt in die Beziehung zwischen Dampfdruck und Temperatur nur noch eine neue, mit der Temperatur sehr wenig veränderliche Größe C ein, die man für jede Substanz besonders experimentell ermitteln muß. Die Beziehung lautet nämlich:

$$(4) \quad p = C \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_G - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen 4. Wärme. p. 72. 1894.

Die Formeln (2) und (4) gelten nur dann, wenn man die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen c_F und c_G als unveränderlich mit der Temperatur ansehen darf.

Man kann wohl mit Sicherheit sagen, daß in den aufgeführten drei Sätzen alles enthalten ist, was man durch rein thermodynamische Überlegungen über diesen Gegenstand finden kann. Die Wissenschaft kann aber hier natürlich nicht stehen bleiben. Es drängt sich uns die unabweisbare Frage auf, ob nicht die beiden für die Substanz charakteristischen Größen Q_0 und C in einem notwendigen Zusammenhang mit ihren anderen physikalischen Konstanten stehen. Hier hat nun die kinetische Theorie einzusetzen und aus ihren Voraussetzungen ebenfalls die beiden Gleichungen (2) und (4) herzuleiten, um dann zugleich etwas Genaueres über Q_0 und C auszusagen.

Geht man nun von der van der Waalsschen Hypothese aus, so findet man, da ja $c_F = c_G$ angenommen wird:

$$Q = Q_0$$

$$p = C \cdot R \cdot \Theta \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Die innere Verdampfungsenergie ist die Energie der Lage, die der Körper gewinnt, wenn man seine Moleküle, entgegen den van der Waalsschen Kohäsionskräften, auseinanderreißt und in weiten Abständen im Raum verteilt.¹⁾ Den Faktor C zu deuten, ist L. Boltzmann²⁾ gelungen. Es ist der reziproke Wert des Volumens, das den Zentren der Moleküle in der Flüssigkeit für ihre Bewegung noch zur Verfügung steht.

Das Boltzmannsche Verteilungsgesetz.

3. Ich denke mir ein bestimmtes Quantum der zu untersuchenden Substanz, in ein bestimmtes adiabatisches Gefäß eingeschlossen, bei einer ganz bestimmten Temperatur. Im allgemeinen wird ein Teil der Substanz im flüssigen (oder festen) Zustand vorhanden sein, der andere im gasförmigen. Ich denke mir nun ferner dieses System ungeheuer oftmal wiederholt in der Weise, daß das Gefäß, die Zahl der Moleküle und die Temperatur jedesmal genau dieselben sind, dagegen die Lage

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 60. 1898.

2) L. Boltzmann, l. c. p. 169.

eines jeden einzelnen Moleküles sowie seine Geschwindigkeit in jeder unter den gegebenen Verhältnissen denkbaren Art variiert. In dieser ungeheuren Zahl von Systemen möge nun eine gewisse Anzahl: $dN = a \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$ (von Systemen) vorhanden sein, in welchen sämtliche Moleküle bis auf eines genau gleiche Lagen und Geschwindigkeiten besitzen, während bei diesem einen herausgegriffenen Molekül die Koordinaten seines Schwerpunktes (p_1, p_2, p_3) und diejenigen Größen (p_4 etc.), die die Lage seiner einzelnen Atome zueinander bestimmen (die Lagrangeschen Koordinaten der Atome), in einem kleinen Intervall: ($p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$) bis ($p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, p_3 + dp_3, p_4 + dp_4, \dots$) auf alle mögliche Weise variieren und ebenso auch die Komponenten der Bewegungsgröße des Schwerpunktes (q_1, q_2, q_3), und die Größen (q_4 etc.), die den relativen Geschwindigkeiten seiner einzelnen Atome entsprechen, zwischen ($q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$) und ($q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3, q_4 + dq_4, \dots$). Lassen wir nun einige Zeit verstreichen, so werden sich Lage und Zustand sowohl des herausgegriffenen als auch sämtlicher anderen Moleküle in diesen dN Systemen vollständig geändert haben. Dagegen ist es wohl möglich, daß eine gewisse Anzahl $dN' = a' \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$ von Systemen, die zur Zeit $t = 0$ eine ganz andere Anordnung hatten, jetzt die Anordnung angenommen haben, welche unsere dN Systeme zur Zeit $t = 0$ besaßen. Ist nun zu allen Zeiten und für jede beliebig herausgegriffene Anordnung der Moleküle $dN = dN'$, so ist in der ungeheuer großen Zahl von vorgestellten Systemen die Zustandsverteilung zu allen Zeiten die gleiche. Wir sagen die Zustandsverteilung unter den Systemen ist stationär.

Eine solche stationäre Zustandsverteilung bekommen wir, wenn wir uns die Anordnungen, die die Moleküle eines Systems hintereinander in unendlich kleinen, konstanten Zeitintervallen dt im Lauf der Zeit annehmen, zeitlich nebeneinander vorstellen.

L. Boltzmann¹⁾ hat nun aus dem Liouvilleschen Satz den folgenden sehr allgemeinen Satz hergeleitet.

Satz 4. Die Zustandsverteilung in der ungeheuer großen Zahl von Systemen, die wir uns vorstellen, ist stationär, wenn

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 103. ff. 1895.

die Anzahl dN derjenigen Systeme, in denen das herausgegriffene Molekül nach Lage und Zustand in dem Intervall $(p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots)$ bis $(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \dots, q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots)$ variiert, sich nach der folgenden Formel berechnet:

$$(5) \quad dN = c \cdot e^{-2h \cdot E} \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$$

vorausgesetzt, daß das Molekül mit keinem anderen sich in einer Wechselwirkung befindet. Hier bedeutet: E die Energie, die das Molekül im ganzen infolge seines Zustandes, der durch die Größen $p_1, \dots, q_1, q_2, \dots$ beschrieben wird, besitzt, ferner: c eine willkürliche Konstante, endlich ist h definiert durch:

$$(6) \quad \frac{n}{2h} = R \cdot \Theta,$$

wo n die Zahl der Moleküle in einem Grammmolekül, R die Gas-konstante, Θ die absolute Temperatur des betrachteten Körpers.

Steht jedoch das Molekül mit einem oder mehreren anderen in Wechselwirkung, und ist die dieser Wirkung entsprechende Energie der Lage E' , sind ferner die eigenen Energien der einzelnen mitwirkenden Moleküle: E_1, E_2, \dots, E_r , so ist die Anzahl dN derjenigen Systeme, in denen die Lagen und Zustände dieser v Moleküle in dem Intervall $(p'_1, \dots, q'_1, \dots, p''_1, \dots, q''_1, \dots, p^{(v)}_1, \dots, q^{(v)}_1, \dots)$ bis $(p'_1 + dp'_1, \dots, q'_1 + dq'_1, \dots, p''_1 + dp''_1, \dots, q''_1 + dq''_1, \dots, p^{(v)}_1 + dp^{(v)}_1, \dots, q^{(v)}_1 + dq^{(v)}_1, \dots)$ variieren, während alle nicht beteiligten Moleküle genau gleich angeordnet sind, nach folgender Formel zu berechnen:

$$(7) \quad \begin{cases} dN = c^v \cdot e^{-2h \cdot (E' + E_1 + E_2 + \dots + E_r)} \\ \cdot dp'_1 \dots dq'_1 \dots dp''_1 \dots dq''_1 \dots dp^{(v)}_1 \dots dq^{(v)}_1 \dots \end{cases}$$

Hier sind c und h dieselben Konstanten, wie in Formel (5).

4. Um diesen Boltzmannschen Satz auf die Theorie der einatomigen Körper anzuwenden, müssen wir die Energien der Atome berechnen. Im Dampf stehen die Atome nur während verschwindend kleiner Zeiten, nämlich beim Zusammenprallen, in Wechselwirkung. Wir können deswegen die Zahl der Atome, die mit anderen in Wechselwirkung stehen, gegen die sich ganz frei bewegenden vernachlässigen, d. h. so rechnen, als ob alle Atome sich frei bewegten. Die einzige Größe, die

für die Berechnung der Energie in Betracht kommt, ist jetzt die Geschwindigkeit u . Sei die Trägheit des Atoms m , so ist:

$$(8) \quad E = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2 m} \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \dots$$

Das Boltzmannsche Verteilungsgesetz wird also hier zu dem Maxwell'schen Gesetz, das den einfachsten Spezialfall des ersteren darstellt.

In dem flüssigen (oder festen) Teil der Substanz kommt zu der Bewegungsenergie noch die Energie der Lage. Wir nehmen an, wie es übrigens schon der Liouvillesche Satz, also auch das Boltzmannsche Verteilungsgesetz, voraussetzt, daß zwischen den Atomen nur konservative Kräfte im Sinne der analytischen Mechanik wirken und daß die Energie der Lage V eine Funktion der Entfernungen zwischen den einzelnen Atomzentren r_{12}, r_{13}, \dots ist. Ferner nehme ich noch an, wie man es bei den sogenannten Fernwirkungen immer tut, daß sich die Energie der Lage darstellen lasse als eine Summe von Ausdrücken, deren jeder nur von der Entfernung je eines Atompaars abhängt:

$$(9) \quad V = \sum \Phi(r_{ik}).$$

Wir wissen nun, daß die Kraftwirkung zwischen zwei Atomen in Entfernungen, die größer sind als der Durchmesser der Molekularsphäre, eine Anziehung ist (die van der Waals'sche Kohäsionskraft), dagegen, sobald die Molekularsphären sich berühren, eine Abstoßungskraft, die mit weiterer Annäherung außerordentlich schnell steigt (die Elastizität der Molekularsphären). Entsprechend können wir $\Phi(r_{ik})$ in zwei Summanden zerlegen: eine positive Größe Φ_1 , die nur in kleinen Entfernungen, hier aber allein in Betracht kommt, und eine negative Größe $-\Phi_2$, von der gerade das Umgekehrte gilt:

$$(10) \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Wir wollen jetzt ausgehen von einer bestimmten Anordnung der Atome, bei welcher der Wert von V ein Minimum ist. Wir bezeichnen diesen Minimalwert mit V_0 und den durchschnittlichen Abstand zweier Atome, deren Molekularsphären sich berühren, bei dieser Anordnung mit r_0 . Die Anordnung selbst nennen wir die Gleichgewichtslage der Atome. In einem

festen Körper besteht die ganze Wärmebewegung nun einfach darin, daß die Atome um die Gleichgewichtslage Pendelschwingungen ausführen, indem jedes abwechselnd seine Bewegungsenergie in potentielle Energie umsetzt und umgekehrt. Ich nehme an, daß in einem flüssigen Körper der Vorgang im wesentlichen derselbe ist, nur daß hier die Atome weit genug gelagert sind, daß sie bei stärkeren Ausschlägen gelegentlich einmal zwischeneinander hindurchschlüpfen können. Dadurch wird ihre Konfiguration nur in der Weise geändert, daß in der entsprechenden Gleichgewichtslage mehrere Atome gegen früher miteinander vertauscht sind.

Um die Ausschläge der Atome um die Gleichgewichtslage angeben zu können, nehmen wir drei aufeinander senkrechte Richtungen als x -, y -, z -Richtung und nennen die Änderungen der Koordinaten eines Moleküls m_1 gegen die seiner Gleichgewichtslage: (x_1, y_1, z_1) , ebenso die eines Moleküls m_2 : (x_2, y_2, z_2) etc. Bezeichnen wir ferner die Richtungskosinus der Verbindungslinie r_0 zwischen m_1 und m_2 in der Gleichgewichtslage (λ, μ, ν) , so ist die Änderung ihrer Entfernung, die wir r' nennen wollen, wie eine kleine Rechnung ergibt:

$$r' = (x_1 - x_2) \cdot \lambda + (y_1 - y_2) \cdot \mu + (z_1 - z_2) \cdot \nu + \frac{1}{2 \cdot r_0} \cdot [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - ((x_1 - x_2) \lambda + \dots)^2].$$

Wir haben dabei die höheren Potenzen von r'/r_0 als unendlich klein höherer Ordnung gegen 1 vernachlässigt.

Damit die Rechnung etwas einfacher ist, stelle ich mir vor, die Anordnung der Atome in der Gleichgewichtslage sei ein kubisches Raumgitter, und r_0 sei der konstante Abstand eines Atoms von den sechs berührenden Atomen. Für die Wirkung zwischen m_1 und den sechs umgebenden Atomen kommt nach dem oben Gesagten nur der positive Teil Φ_1 der Funktion Φ in Betracht und zwar ist mit derselben Genauigkeit, die wir bei der Berechnung von r' anwandten:

$$\Phi(r_{12}) = \Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot r' + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot r'^2.$$

Wir wählen nun als die Koordinatenrichtungen naturgemäß die drei Kanten des Elementarwürfels des Raumgitters.

Es sei z. B. die Richtung von m_1 nach m_2 die x -Richtung, dann ist:

$$r' = (x_1 - x_2) + \frac{1}{2r_0} \cdot ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)$$

und:

$$\begin{aligned} \Phi(r_{12}) = \Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot (x_1 - x_2) + \\ \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot \right. \\ \left. \cdot ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2) \right]. \end{aligned}$$

Analog berechnen sich die Werte $\Phi(r_{13})$ und $\Phi(r_{14})$ für die Kraftwirkung zwischen m_1 und den beiden in den positiven Richtungen y und z gelegenen Molekülen m_3 und m_4 . Für alle entfernten Moleküle kommt nicht der Teil Φ_1 , sondern der negative Teil $-\Phi_2$ von Φ allein in Betracht. Aber aus dem, was wir oben über die verschiedene Natur der beiden Funktionen Φ und Φ_2 bemerkt haben, geht hervor, daß wir gegenüber den großen Werten, die $\partial \Phi_1 / \partial r$ annimmt, jedenfalls $\partial \Phi_2 / \partial r$ vernachlässigen können, ohne einen bemerkbaren Fehler zu machen. Wir erhalten somit schließlich, indem wir beachten, daß sich bei der Summation die linearen Glieder wegheben, für die Energie pro Grammmolekül:

$$(11) \quad V = V_0 + L$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} L = n \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot \sum ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_4)^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2r_0} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot \sum ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 \right. \\ \left. + (x_1 - x_3)^2 + (z_1 - z_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (x_1 - x_4)^2) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hier ist V_0 die potentielle Energie pro Grammmolekül in der Gleichgewichtslage. Die ganze Energie eines Grammmoleküls des flüssigen (oder festen) Körpers ist: $V_0 + L + T$, wenn wir setzen:

$$(13) \quad T = \frac{n}{2m} \cdot \sum (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Die Größe $L + T$ können wir passend den Wärmegehalt des Körpers nennen. Im Dampf ist die ganze Energie nur T .

Die Gleichgewichtsbedingung Dampf—Flüssigkeit.

5. Während sich für ein einatomiges Gas der vollständige Beweis ¹⁾ führen läßt, daß die einzige Zustandsverteilung, die mit dem zweiten Hauptsatz vereinbar ist, durch das Maxwell'sche Gesetz ausgedrückt wird, ist dieser Beweis für das allgemeine Boltzmannsche Gesetz noch nicht gelungen. Wir nehmen indessen mit Boltzmann als höchstwahrscheinlich an, daß er sich führen läßt, und betrachten das Boltzmannsche Gesetz als das richtige Charakteristikum der ungeordneten Molekularbewegung.

Ich denke mir nun die Substanz, die wir untersuchen, in ein Gefäß eingeschlossen, dessen Wandung wenigstens zum Teil wärmeleitend ist. Durch diesen Wärmeleiter stehe sie in Verbindung mit einem anderen Körper gleicher Temperatur. Dieses System denke ich mir wieder ungeheuer oftmal wiederholt, indem die Moleküle der betrachteten Substanz nach Maßgabe des Boltzmannschen Gesetzes alle möglichen Anordnungen bekommen. Ob und wie gleichzeitig auch die Moleküle des mit ihr wärmeleitend verbundenen Körpers in Lage und Zustand variieren, oder ob sie immer dieselbe Anordnung behalten, ist gleichgültig. Diese ungeheuere Zahl von Systemen bleibe nun einige Zeit sich selbst überlassen, ohne daß eine äußere Arbeit geleistet oder Wärme zu- oder abgeleitet wird, und ohne daß nicht umkehrbare Änderungen, z. B. chemische Umsetzungen, eintreten. Nach dem zweiten Hauptsatz muß dann die Temperatur in all den ungeheuer vielen Systemen konstant bleiben, außerdem aber, und das ist uns hier das Wesentliche, muß die Zustandsverteilung in der Substanz, die wir untersuchen, wie sie es anfangs war, die der ungeordneten Molekularbewegung bleiben. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so hätten wir in dem mit ihr wärmeleitend verbundenen Körper einen Apparat gewonnen, der die ungeordnete Molekularbewegung in eine anders geartete umwandelt.

Ich wende diese Betrachtungsweise auf den folgenden Fall an. Es sei ein Zylinder aus adiabatischem Material durch eine leicht verschiebbare wärmeleitende Querwand in zwei

1) L. Boltzmann, Gastheorie 1. p. 32. ff. 1895.

Abteilungen A und B geteilt. In beiden Räumen befinde sich die untersuchte Substanz, und zwar im Raume A als gesättigter Dampf, während in B mindestens die gleiche Substanzmenge als Flüssigkeit vorhanden ist und außerdem vielleicht auch noch Dampf. Die Substanz in A sei die von uns betrachtete, der wir bei der oftmaligen Wiederholung alle möglichen Anordnungen nach Maßgabe des Boltzmannschen Gesetzes erteilen, indem wir für die Konstante c einen ganz bestimmten Wert festsetzen. Der Inhalt von B sei der fremde, mit ihr verbundene Körper. Die wärmeleitende Querwand möge nun von Anfang an eine unendlich kleine Geschwindigkeit in der Richtung $B - A$ haben. Es findet dann, indem Substanz in B verdampft und in A niederschlägt, ein umkehrbarer isothermer Vorgang statt, bei welchem von außen weder Wärme zu- oder abgeleitet, noch Arbeit geleistet wird. Die Zustandsverteilung in A bleibt also immer die Boltzmannsche. In dem gasförmig gebliebenen Teil der Substanz, wo Formel (5) unverändert anzuwenden ist, hat die Konstante c natürlich denselben Wert, wie zu Anfang. Da aber ferner ein fortwährender Austausch von Molekülen zwischen Dampf und Flüssigkeit stattfindet, so gilt dasselbe auch für den flüssigen Teil, wo nach Formel (7) zu rechnen ist. Diese Gleichsetzung von c für die Moleküle im Gasraum und im Flüssigkeitsraum liefert uns die Gleichgewichtsbedingung zwischen Dampf und Flüssigkeit. Wenn wir nämlich die wärmeleitende Querwand immer weiter vorrücken lassen, bis endlich die Substanz in A ganz verflüssigt ist, so bleibt dabei die Konstante c in dem Boltzmannschen Verteilungsgesetz immer dieselbe. Da ferner auch die ungeheuer große Zahl der vorgestellten Systeme gleichbleibt, so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 5. Die Gleichgewichtsbedingung zwischen Dampf und Flüssigkeit ist, daß die gesamte Zahl der möglichen Anordnungen, berechnet durch Integration der Boltzmannschen Verteilungsformel (5) und (7) für eine gleiche Zahl Moleküle und bei gleichgewähltem c , sich als dieselbe ergibt, wenn man einmal die Substanz im Zustand des gesättigten Dampfes, das andere Mal als Flüssigkeit annimmt.

Wir wollen nun die Substanzmenge in A gerade gleich 1 Grammolekül wählen (Zahl der Moleküle n), ferner wollen

wir ihren Energiegehalt im flüssigen Zustand mit Q_F , im gasförmigen durch Q_G bezeichnen. Endlich sei die Integration über alle möglichen Anordnungen im gasförmigen Zustand durch den Buchstaben G , im flüssigen Zustand durch F angedeutet. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$(14) \quad \begin{cases} e^{-2h \cdot Q_G} \cdot \int_G dp_1' \dots dq_1' \dots dp_1^{(n)} \dots dq_1^{(n)} \dots \\ = e^{-2h \cdot Q_F} \cdot \int_F dp_1' \dots dq_1' \dots dp_1^{(n)} \dots dq_1^{(n)} \dots \end{cases}$$

Wir haben dabei e^a beiderseits weggehoben.

Die Gleichung (14) ist der für uns in Betracht kommende Spezialfall eines sehr allgemeinen Satzes von Boltzmann.¹⁾

Dampfdruckkurve einatomiger Körper.

6. Wir wollen unter W den Wärmegehalt, d. h. denjenigen Teil der inneren Energie des Körpers verstehen, der den unregelmäßigen Bewegungen der Moleküle zugehört. Nach 4. ist $W_G = T$, $W_F = L + T$, wo T und L nach (13) und (12) zu berechnen sind. Das Integrationsgebiet der beiden Integrale in (14) ist bestimmt durch die Gleichung $W = \text{konst.}$ und durch die Bedingung, daß die Atome alle innerhalb des Raumes v_G bez. v_F liegen. Ist W eine quadratische Funktion der Größen p und q , so hat Boltzmann²⁾ gezeigt, wie man die Integration ausführen kann. Nun ist in der Tat

$$W_G = T = \sum \frac{2}{m} \cdot q^2,$$

die Integration über alle q ergibt also nach Boltzmann²⁾:

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{3n}}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)} \cdot (2m \cdot W_G)^{\frac{3n-2}{2}}.$$

Integrieren wir weiter über die Koordinaten des Atoms m_1 : p_1' , p_2' , p_3' , so ergibt sich, wenn wir den von den Wirkungssphären der Atome eingenommenen Raum gegen den leeren Raum als unendlich klein ansehen, mit anderen Worten, wenn

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 136. 1898.

2) l. c. p. 96 ff.

wir, wie in den Formeln (1), (2), (4), den Dampf als vollkommenes Gas betrachten:

$$\int dp_1' \cdot dp_2' \cdot dp_3' = v_G.$$

Dasselbe Resultat bekommen wir bei jedem Atom und erhalten schließlich für die linke Seite der Gleichung (14):

$$e^{-2h \cdot q_G} \cdot v_G^n \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{3n}}{\Gamma(\frac{3n}{2})} \cdot (2m \cdot W_G)^{\frac{3n-2}{2}}.$$

Für die Flüssigkeit ist die Integration über die Koordinaten etwas schwieriger. Wir verfahren da so, daß wir die Moleküle zuerst um die Punkte eines kubischen Raumgitters herum kleine Bewegungen machen lassen und sie darauf auf alle mögliche Weise permutieren. Wir haben dann einfach das Integral, das wir für das kubische Raumgitter erhalten, mit $n!$ zu multiplizieren. Leicht auszuführen ist das Integral jedoch nur dann, wenn man in dem Ausdruck (12) für L den Faktor

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \text{ gegen } \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0$$

vernachlässigen kann. Da die abstoßende Kraft $P = -\partial \Phi / \partial r$ an der Oberfläche der Molekularsphäre mit abnehmendem r außerordentlich schnell anwächst (vgl. 4.), so ist jedenfalls in erster Annäherung diese Vernachlässigung gestattet. Wir wollen deshalb zunächst einmal das Glied mit

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_0$$

streichen, und nachher den Fehler, den wir gemacht haben, zu schätzen versuchen. Wir wollen ferner setzen:

$$(x_1 - x_2) = \xi_1, \quad (y_1 - y_2) = \eta_1, \quad (z_1 - z_2) = \zeta_1 \quad \text{und} \quad (\partial^2 \Phi / \partial r^2)_0 = b,$$

dann ist:

$$W_F = \sum \frac{b}{2} \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \sum \frac{1}{2m} \cdot p^2.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} dp_1' \cdot dp_2' \cdot dp_3' \cdot dp_1'' \dots &= dx_1 \cdot dy_1 \cdot dz_1 \cdot dx_2 \dots \\ &= \frac{1}{d} \cdot d\xi_1 \cdot d\eta_1 \cdot d\zeta_1 \dots, \end{aligned}$$

wo Δ die Funktionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Der Wert dieser Determinante ist einfach $\Delta = 1$. Man kann nun das Integral auf der rechten Seite von (14) ebenfalls berechnen und bekommt:

$$e^{-2h \cdot Q_F} \cdot n! \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{6n}}{\Gamma(3n)} \cdot (2m)^{\frac{3n-2}{2}} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^{\frac{3n}{2}} \cdot (W_F)^{3n-1}.$$

Wir setzen nun die beiden durch die Integration gewonnenen Ausdrücke einander gleich und ziehen beiderseits die n^{te} Wurzel aus, indem wir beachten, daß:

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

und für sehr große Zahlen:

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2k \cdot \pi}.$$

Wir erhalten so:

$$v_G \cdot (W_G)^{3/2} = \sqrt{\frac{e \cdot \pi^3}{27}} \cdot e^{\frac{2h}{n} \cdot (Q_G - Q_F)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot b^3}} \cdot W_F^{\frac{3}{2}}.$$

Nun ist aber nach (6):

$$\frac{n}{2h} = R \cdot \Theta.$$

Ferner ist¹⁾:

$$(15) \quad \begin{cases} W_G = 3n \cdot \frac{q_1}{2m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2h} = \frac{3}{2} \cdot R \Theta, \\ W_F = 6n \cdot \frac{q_2}{2m} = 3 \cdot \frac{n}{2h} = 3 \cdot R \Theta. \end{cases}$$

Endlich ist die Differenz $Q_G - Q_F$ nichts anderes als diejenige Energie, die der Körper gewinnt, wenn man ihn aus dem flüssigen (oder festen) Aggregatzustand in ein Gas von gleicher Temperatur umwandelt, d. h. also die innere Verdampfungsenergie, gerechnet pro Grammmolekül:

$$(16) \quad Q_G - Q_F = Q.$$

Unsere Gleichung wird jetzt:

$$v_G = \frac{\sqrt{8 \cdot e \cdot \pi^2}}{\sqrt{n \cdot b^3}} \cdot e^{\frac{Q}{R \Theta}} \cdot (R \Theta)^{3/2}.$$

Wenden wir jetzt noch die Zustandsgleichung der idealen Gase auf den Dampf an: $p \cdot v_G = R \cdot \Theta$, so bekommen wir schließlich die gesuchte Gleichung der Dampfdruckkurve:

$$(17) \quad p = \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 e \cdot \pi^2}} \cdot (R \cdot \Theta)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich die spezifische Wärme des Dampfes und der Flüssigkeit bei konstantem Volumen pro Grammmolekül:

$$(18) \quad c_G = \frac{3}{2} R, \quad c_F = 3 R.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist das sogenannte Dulong-Petitsche Gesetz.²⁾

Man erkennt jetzt, daß Gleichung (17) in der Tat die Formel (4) in dem Fall einer einatomigen Substanz ist, wenn man setzt:

$$(19) \quad C = \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 e \pi^2}}.$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 100. 1898; 1. p. 50. 1895.

2) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 708. 1893.

Um diese Formel etwas anschaulicher zu deuten, wollen wir uns den Mittelwert $\overline{x_1^2} = (x_1 - x_2)^2$ berechnen. Es ergibt sich:

$$\overline{x_1^2} = \frac{1}{2h \cdot b}.$$

Dasselbe für $\overline{\eta_1^2}$ und $\overline{\xi_1^2}$. Wir setzen nun

$$\overline{x_1^2} + \overline{\eta_1^2} + \overline{\xi_1^2} = \lambda^2,$$

also

$$\lambda = \sqrt{3/2 h b}.$$

Um uns die Bedeutung von λ klar zu machen, wollen wir durch die drei Atome m_2, m_3, m_4 , welche m_1 benachbart sind, eine Kugelfläche vom Radius r_0 legen. In der Gleichgewichtslage bildet m_1 das Zentrum dieser Fläche. Bei der unregelmäßigen Wärmebewegung vibriert nun erstens diese Kugel als Ganzes, zweitens schwingen die drei Atome m_2, m_3, m_4 tangential auf ihrer Oberfläche, drittens endlich schwingt m_1 um das Zentrum und zwar ist λ das quadratische Mittel seiner Ausschläge. Derjenige Ausschlag, der am häufigsten vorkommt, ist:

$$\lambda_w = 1/\sqrt{h \cdot b}.$$

Wenn man ferner beachtet, daß $n \cdot r_0^3 = v_F$, so bekommt man nun durch eine kleine Rechnung:

$$\frac{r_0^3}{\lambda_w^3} = \frac{v_F}{(\Theta \cdot R)^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8}}.$$

oder:

$$(20) \quad C = \frac{1}{\sqrt{e \cdot n^3}} \cdot \frac{(\Theta \cdot R)^{1/2}}{v_F} \cdot \left(\frac{r_0}{\lambda_w}\right)^3.$$

$$(21) \quad \frac{\lambda_w}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{e \cdot n^3} \cdot C \cdot v_F}} \cdot (R \Theta)^{1/2}.$$

7. Wir müssen jetzt noch den Fehler ermitteln, den wir gemacht haben, als wir das Glied mit dem Faktor $1/r_0 \cdot (\partial \Phi / \partial r)_0$ wegließen. Wir setzen:

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_0 = -b_1,$$

b_1 ist eine positive GröÙe, die klein ist gegen b . Wir wählen jetzt neue Variable ξ, η, ζ , indem wir setzen:

$$\xi_1^2 = (x_1 - x_3)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2),$$

$$\eta_1^2 = (y_1 - y_3)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((y_1 - y_3)^2 + (y_1 - y_4)^2),$$

$$\zeta_1^2 = (z_1 - z_3)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((z_1 - z_3)^2 + (z_1 - z_4)^2).$$

Vernachlässigen wir die höheren Potenzen von b_1/b , so ist:

$$\xi_1 = (x_1 - x_3) - \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_3)}.$$

In die Funktionaldeterminante Δ haben wir einzusetzen:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1 + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_3)^3} - \frac{b_1}{b} \cdot \frac{(x_1 - x_3) + (x_1 - x_4)}{(x_1 - x_3)} \text{ statt } 1,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -1 - \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^3} \text{ statt } -1,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = + \frac{b_1}{b} \cdot \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = + \frac{b_1}{b} \cdot \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_2} \text{ statt } 0.$$

Man erhält:

$$\Delta = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \dots$$

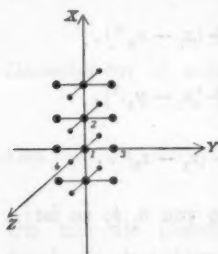
Nun ergibt eine leichte Umrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 1 - \frac{b_1}{b} + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^3} \\ &= e - \frac{b_1}{b} + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^3}, \end{aligned}$$

wenn wir wieder die höheren Potenzen von b_1/b vernachlässigen. Wir berechnen nun gleich, da wir, um die Druckkurve zu erhalten, die n^{te} Wurzel ausziehen:

$$\Delta^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{3b_1}{b} + \frac{3b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^3},$$

wo der horizontale Strich wie immer andeuten soll, daß der Mittelwert der betreffenden Größe zu nehmen ist. Dieser



Mittelwert läßt sich leider bei den von uns gemachten Voraussetzungen nicht exakt berechnen. Wenn wir nämlich, wie wir bei unserer Berechnung getan haben, wirklich nur abstoßende Kräfte zwischen den Atomen annehmen wollten, so müßten wir schließen, daß sich die Reihe der auf der x -Achse befindlichen Atome (zu denen m_1 und m_2 gehören) gegen die an diese Reihe anstoßenden (z. B. m_3 und m_4) beliebig weit verschieben könnten, ohne Widerstand zu erfahren, solange nur in der Reihe selbst die Abstände ungeändert bleiben. Wollten wir genau rechnen, so müßten wir noch die Kräfte einführen, die diese Verschiebung verhindern. Ohne die Kenntnis dieser Kräfte können wir nur soviel sagen, daß die Mittelwerte $(x_2 - x_3)^2 / (x_1 - x_2)^2$ und ebenso $(x_2 - x_4)^2 / (x_1 - x_2)^2$ jedenfalls größer als 1 sind. Es ist also $\Delta^{1/n} = k$ eine nicht sehr große Zahl, aber jedenfalls größer als 1, sagen wir etwa $k \sim 1 + b_1/b$. Formel (19) ist zu ersetzen durch:

$$(22) \quad C = k \cdot \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 e \pi^3}}.$$

Ungeändert bleibt die Berechnung des Wärmehaltes und demgemäß auch Formel (18). Formel (20) und (21) sind nur als rohe Annäherungsformeln verwendbar.

Verdampfungsenergie.

8. Wenn man eine Flüssigkeit in Dampf verwandelt, so ändert sich erstens die potentielle Energie, die der Körper bei Gleichgewichtslage der Moleküle besitzt, zweitens der Wärmegehalt. Der erste dieser beiden Summanden ist sehr oft von der Temperatur nur wenig abhängig, da die Flüssigkeit beim Erwärmen ihr Volumen nur wenig ändert und folglich die Gleichgewichtslage auch ungeändert bleibt, und da in den Gasen mit der Volumenänderung überhaupt keine wesentliche Energieänderung verbunden ist. Dieser Summand ist also die

in Formel (2) mit Q_0 bezeichnete Größe. Der zweite Summand läßt sich nur dann berechnen, wenn die spezifische Wärme bei konstantem Volumen in beiden Aggregatzuständen nicht von der Temperatur abhängt. Dann ist der Wärmeinhalt der Flüssigkeit $c_F \cdot \Theta$, der des Gases $c_G \cdot \Theta$. Man erhält so auch durch die kinetische Betrachtungsweise die Formel (2). Speziell für einatomige Körper ist (nach 4.)

$$Q = -V_0 - L = Q - \frac{3}{2} R \cdot \Theta.$$

Wir wollen jetzt versuchen, nach den Voraussetzungen, die wir über die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte gemacht haben, die Größe Q_0 etwas genauer zu berechnen. Es sei, wie in 4. — $\Phi_2(r_{ik})$ die potentielle Energie der van der Waalsschen Kohäsionskraft zwischen den Molekülen m_i und m_k . Setzen wir

$$n \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \Phi_2(r) \cdot 4\pi r^2 dr = A,$$

also bezeichnen wir die bekannte Konstante der van der Waalsschen Theorie, die gewöhnlich als a geschrieben wird, mit A , so ist der eine Summand der Energie Q_0 gleich A/v_F .¹⁾ Von dem anderen Teil der potentiellen Energie, der den elastischen Abstoßungskräften der Molekülsphären entspricht, wollen wir annehmen, daß sie sich ungefähr durch einen Ausdruck folgender Form berechnen läßt:

$$\Phi_1(r) = \frac{a}{r^s}.$$

Der entsprechende Summand von Q_0 ist $-3n \cdot a/r_0^s$. Hier ist a eine Konstante; r_0 dagegen ist proportional mit $\sqrt[3]{v_F}$, denn $v_F = n \cdot r_0^3$. Wir können daher setzen:

$$3n \cdot a/r_0^s = B \cdot v_F^{-\frac{s}{3}},$$

wo B eine zweite für die Substanz charakteristische Konstante ist. Es ist also:

$$(23) \quad Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{s}{3}},$$

$$(24) \quad Q = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{s}{3}} - \frac{3}{2} R \cdot \Theta.$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 60. 1898.

Die Konstante B steht in einer einfachen Beziehung zu der in der Dampfdruckgleichung vorkommenden Konstanten C . Da nämlich

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)_0 = b = \frac{v \cdot (v+1) \cdot a}{r_0^{v+2}},$$

$$\sqrt{n} \cdot b = v \cdot (v+1) \cdot n \cdot \frac{a}{r_0^v} \cdot (n \cdot r_0^3)^{-1/2}$$

$$= \frac{v \cdot (v+1)}{2} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v+2}{3}},$$

so ist:

$$(25) \quad C = k \cdot \sqrt{\frac{v^3 \cdot (v+1)^3}{8 \cdot 27 \cdot e \cdot \pi^3}} \cdot B^{1/2} \cdot v_F^{-\frac{v+2}{2}},$$

wo k der in 7. eingeführte Zahlenfaktor ($k \sim 1 + b_1/b$) ist. Da

$$-\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_0 = b_1 = \frac{v \cdot a}{r_0^{v+2}},$$

so ist $b_1/b = 1/(v+1)$, also in der Tat eine ziemlich kleine Zahl, wenn v groß ist.

Für den häufigsten Ausschlag der Atome λ_w liefert nun Formel (21):

$$(26) \quad \frac{\lambda_w}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot R \Theta}{v \cdot (v+1) \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}}}}.$$

Wir wollen endlich, da $B \cdot v_F^{-v/3}$ die überall wiederkehrende Größe ist, die Formel (25) noch folgendermaßen schreiben:

$$(27) \quad B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} = \frac{6 \cdot \pi \cdot \sqrt[3]{e}}{v \cdot (v+1) \cdot \sqrt[3]{k^3}} \cdot (C \cdot v_F)^{3/2}.$$

Bemerkung über mehratomige Körper.

9. Alle bisher angestellten Untersuchungen würden sich auf mehratomige Körper ohne weiteres übertragen lassen, wenn auch für sie der Unterschied zwischen der spezifischen Wärme des Dampfes und der Flüssigkeit regelmäßig $\frac{3}{2} \cdot R$ betrüge. Denn in diesem Falle könnten wir annehmen, daß die Bewegungen der Moleküle in der Flüssigkeit dieselben wären, wie im Dampf, und daß zu dem Wärmegehalt der Flüssigkeit nur noch die durch Formel (12) definierte Größe L hinzukäme. Ich habe in der folgenden Tab. 1 die spezifischen Wärmen einiger Körper

im flüssigen und im dampfförmigen Zustande zusammengestellt. Dabei ist c_F aus der beobachteten Zahl nach Formel (3) ausgerechnet. Außer bei Wasser, welches bekanntlich eine besonders kleine thermische Ausdehnung zeigt, ist c_F beträchtlich kleiner als das beobachtete c_{FP} . Leider sind die Zahlen nicht ganz sicher, besonders werden für die Kompressibilität α von verschiedenen Beobachtern ziemlich abweichende Zahlen angegeben. Für die Flüssigkeiten ist die spezifische Wärme bei ca. 20° , für die Dämpfe bei höheren Temperaturen hingeschrieben. Man darf daher nicht allzuviel aus der Vergleichung der Zahlen schließen wollen.

Tabelle 1.

| | | c_F | c_F/R | c_G/R |
|---------------------|----------------------------------|----------|---------|---------|
| Wasser | H ₂ O | 18.0,98 | 8,9 | 3,3 |
| Schwefelkohlenstoff | CS ₂ | 76.0,15 | 5,7 | 5,0 |
| Chloroform | CHCl ₃ | 120.0,12 | 7,2 | 8,4 |
| Methylalkohol | CH ₃ OH | 32.0,50 | 8,0 | 6,3 |
| Äthylalkohol | C ₂ H ₅ OH | 46.0,48 | 11,0 | 9,4 |

Während, mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Zahlen, bei den vier letzten Substanzen sehr wohl die Möglichkeit vorhanden ist, daß entweder die van der Waalssche Hypothese oder die dieser Arbeit zu Grunde gelegte das Richtige trifft, ist dies beim Wasser gänzlich ausgeschlossen. Die Bewegungsfreiheit der Moleküle im flüssigen Wasser ist außerordentlich viel höher als die im Wasserdampf. Wenn im flüssigen Wasser alle drei Atome sich völlig frei relativ zueinander und zu den benachbarten Molekülen bewegen können und gleichzeitig bei ihrer Bewegung elastische Kräfte in Wirkung treten, in der Art, wie wir sie in 4. kennen gelernt haben, dann erhalten wir für den Wärmegehalt eines Grammoleküls Wasser:

$$3.(T + L) = 9.R.\Theta,$$

also für die spezifische Wärme den Wert $c_F = 9R$. Es scheint mir nicht unmöglich, daß sich die Atome der Wassermoleküle ungefähr in der beschriebenen Weise bewegen. Wenn andererseits in den Dampfmolekülen die Verkettung der Atome so ist, daß die beiden Wasserstoffatome sich frei bewegen können,

solange ihr Abstand vom Sauerstoffatom nur konstant bleibt, also gerade so, als ob jedes an einer starren Stange sitzt, die am Sauerstoffatom durch ein Kugelgelenk befestigt ist, dann hat die Bewegungsfreiheit den Grad: $3 + 2 + 2 = 7$, und wenn bei diesen Bewegungen keine elastischen Kräfte ins Spiel treten, so erhalten wir $c_G = 3,5 \cdot R$.

Ob die beiden geschilderten Mechanismen die Wirklichkeit ungefähr wiedergeben, müssen wir natürlich dahingestellt sein lassen. Nur das eine läßt sich mit einem sehr hohen Grad von Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Atome im Molekül des Wassers eine größere Beweglichkeit haben, als im Molekül des Dampfes.

In solchen Fällen aber versagt die Boltzmannsche Methode vollständig, weil der Liouvillesche Satz auf sie nicht angewendet werden kann.

Bemerkung über den Liouvilleschen Satz.

10. Boltzmann hat aus dem Liouvilleschen Satz den eminent wichtigen Schluß¹⁾ gezogen, daß jedem Freiheitsgrade der Bewegung des Moleküls dieselbe kinetische Energie zukommt, und zwar gilt dieser Satz ohne Rücksicht darauf, ob die Substanz gasförmig, flüssig oder fest ist.

Damit ist die Vorstellung, die wir soeben über das Wassermolekül als sehr wahrscheinlich gewonnen haben, durchaus unvereinbar. Man denke sich nur ein Molekül, das gerade aus dem Wasser in den Dampf übergeht. Solange es noch im Wasser ist, müßten die Wasserstoffatome auch in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit dem Sauerstoffatom Schwingungen ausführen, deren mittlere kinetische Energie ebenso groß ist, wie die der Schwingungen in einer zur Verbindungslinie senkrechten Richtung. Sobald es in den Dampf übergegangen ist, müßten die Schwingungen der zuerst genannten Art völlig aufhören, während die der zweiten Art bestehen bleiben. Es ist klar, daß das ein Widerspruch gegen den Boltzmannschen Satz, also auch gegen den Liouvilleschen Satz ist.

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 100. 1898.

Bei dieser Gelegenheit sei auch auf das eigentümliche Verhalten des reinen Kohlenstoffs hingewiesen, dessen Atomwärme bei sehr hohen Temperaturen nahezu den Wert $3 \cdot R$ hat, während sie bei niedrigen Temperaturen unter $0,5 R$ heruntergeht. Da ein allmähliches Anwachsen der Zahl der Freiheitsgrade von äußerst kleinen Werten bis zu dem der einatomigen Körper unmöglich ist, so dürfte sich das Verhalten des Kohlenstoffs wohl auch sehr schwer mit dem Boltzmannschen Satz vereinigen lassen.

In der Tat beruht der Liouvillesche Satz auf einer Voraussetzung, die in vielen Fällen jedenfalls nahe zutrifft, aber doch nicht in allen, nämlich der: daß die auf die Moleküle und Atome wirkenden Kräfte sich als konservative Fernkräfte im Sinne der analytischen Mechanik berechnen lassen. Nun wird aber durch die Wärmeschwingungen der Moleküle auch der Äther zu einem besonderen Schwingungszustand erregt, er nimmt nämlich den Zustand der sogenannten „schwarzen Strahlung“ an. Die Wechselwirkungen zwischen Äther und Molekülen, die zweifellos vorhanden sind, sind in den Bewegungsgleichungen der Atome noch ausgelassen. Man muß also diese Gleichungen jedenfalls noch durch Glieder ergänzen, die nicht mehr den Charakter der konservativen Kräfte, sondern eher den von Reibungskräften haben, und denen ein Energieverlust durch die Strahlung entspricht. Diese Glieder sind in sehr vielen Fällen jedenfalls gegen die konservativen Kräfte zu vernachlässigen. In anderen Fällen sind sie aber vielleicht gerade die vorherrschenden und es wird deswegen die betreffende Bewegungskomponente so stark gedämpft, daß man sie gleich Null setzen kann.

Die Einführung dieser Wechselwirkungen zwischen Atomen Äther in die Theorie mag wohl sehr schwierig sein, aber jedenfalls ist nicht zu hoffen, daß man eine genügende Theorie der mehratomigen Körper entwickeln kann, ehe dies geschehen ist.

Zustandsgleichung einatomiger Körper.

11. Die Zustandsgleichung der Körper ist bekanntlich durch den Virialsatz ausgedrückt:

$$\sum m \bar{u}^2 + \sum (x \cdot \bar{X} + y \cdot \bar{Y} + z \cdot \bar{Z}) + \sum r_{ik} \cdot f'(r_{ik}) = 0.$$

Hier bedeutet u die Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt eines Moleküls bewegt, (x, y, z) sind die Koordinaten des Schwerpunktes, X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft, die auf das Molekül wirkt, r_{ik} ist die Entfernung zweier Molekülzentren m_i und m_k , $f(r_{ik})$ die gegenseitige Kraftwirkung, positiv gerechnet, wenn es eine Abstoßung ist. Die horizontalen Striche sollen bedeuten, daß die Mittelwerte zu nehmen sind.

Die Werte der beiden ersten Summanden sind bekannt:

$$\sum m \bar{u}^2 = 3 R \cdot \Theta,$$

$$\sum (x \cdot X + y \cdot Y + z \cdot Z) = -3 p v.$$

Dabei ist angenommen, daß die einzige äußere Kraft ein auf der ganzen Oberfläche gleichmäßig wirkender, normal gerichteter Druck p ist. v ist das Volumen eines Grammoleküls.

Den letzten Summanden zerlegen wir, geradeso wie in 4. die entsprechende Energie in zwei Summanden, indem wir setzen: $f(r) = f_1(r) - f_2(r)$, wo $f_1 = -\partial \Phi_1 / \partial r$, $f_2 = -\partial \Phi_2 / \partial r$. Wir nehmen geradeso, wie in 4. an, daß man genau genug rechnet, wenn man setzt: $\sum f_2(r) \cdot r = \sum f_2(r_0) \cdot r_0$. Nun ist aber das Virial dieser Kräfte schon von van der Waals berechnet worden zu $3 A \cdot v^{-1}$, wir haben also:

$$\sum f(r) \cdot r = \sum f_1(r) \cdot r - 3 A \cdot v^{-1}.$$

In Gasen ist der erste Summand sehr klein (er hat in der genaueren van der Waalsschen Gleichung, wie Boltzmann¹⁾ berechnet, den Wert $3 R \Theta \cdot b/v \cdot (1 + 5 b/8 v)$, wo b die zweite van der Waalssche Konstante bedeutet), in Flüssigkeiten und festen Körpern dagegen nimmt er sehr beträchtliche Werte an. Wir berechnen ihn durch eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned} f_1(r) \cdot r &= f_1(r_0) \cdot r_0 + (f_1(r_0) + r_0 \cdot f_1'(r_0)) \cdot r' \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (2 f_1'(r_0) + r_0 \cdot f_1''(r_0)) \cdot r'^2. \end{aligned}$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 151. 1898.

Nehmen wir, wie in 8. an, daß $\Phi_1(r) = a/r^\nu$, so ist

$$f_1(r) = \nu \cdot a/r^{\nu+1}, \quad f_1'(r) = \nu \cdot (\nu+1) \cdot a/r^{\nu+2},$$

$$f_1''(r) = \nu \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot a/r^{\nu+3},$$

also:

$$\begin{aligned} f_1(r) \cdot r &= \nu \cdot \frac{a}{r^\nu} - \nu^2 \cdot \frac{a}{r^{\nu+1}} \cdot r' + \frac{\nu^2 \cdot (\nu+1)}{2} \cdot \frac{a}{r^{\nu+2}} \cdot r'^2 \\ &= \nu \cdot \left(\Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_0 \cdot r' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_0 \cdot r'^2 \right) \end{aligned}$$

$$\sum f_1(r) \cdot r = \nu \cdot \left(B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} + \frac{3}{2} R \Theta \right),$$

wo B die in Formel (23) und (24) eingeführte Konstante ist.

Wir haben nunmehr die Zustandsgleichung der einatomigen Körper im festen (oder flüssigen) Zustand gewonnen:

$$(28) \quad p \cdot v_F + A \cdot v_F^{-1} - \frac{\nu}{3} B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{\nu+2}{2} \cdot R \cdot \Theta.$$

Aus der Ableitung dieser Formel geht hervor, daß sie nur so lange gilt, als die spezifische Wärme des Körpers konstant den Wert $3R$ hat. Sobald in den Ausdruck für den Wärmeinhalt höhere Potenzen von Θ eintreten (also c_F sich mit der Temperatur ändert), müssen auch auf der rechten Seite von (28) höhere Potenzen von $R\Theta$ auftreten.

Wir wollen jetzt einmal (28) nach p differenzieren, indem wir Θ konstant halten. Wir bekommen auf diese Art die Kompressibilität κ des Körpers, deren reziproker Wert der Kompressionsmodul γ ist:

$$(29) \quad -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = \kappa = \frac{1}{\gamma}.$$

Es ergibt sich:

$$(30) \quad \gamma = p + \frac{\nu^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2}.$$

Da die Drucke, die man bei den Messungen anwendet, auch in den extremsten Fällen ganz verschwindend klein sind gegen γ , so kann man auch einfacher schreiben:

$$(31) \quad \gamma = \frac{\nu^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2},$$

oder:

$$(32) \quad \gamma = \frac{\nu \cdot (\nu-3)}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}-1} - R \cdot \Theta \cdot v_F^{-1}.$$

Wenn wir andererseits (28) nach Θ differenzieren bei konstantem p , so bekommen wir den thermischen Ausdehnungskoeffizienten:

$$(33) \quad \alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta}.$$

Man erhält:

$$\alpha \cdot \left(p + \frac{\nu^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2} \right) = \frac{\nu+2}{2} \cdot R \cdot v_F^{-1},$$

oder mit Rücksicht auf (30):

$$(34) \quad \alpha = \frac{\nu+2}{2} \cdot \frac{R}{\gamma \cdot v_F}.$$

Differenziert man noch einmal nach Θ , so bekommt man:

$$(35) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \Theta} = \frac{2}{\nu+2} \cdot \frac{\alpha^2}{R} \cdot \left(R + \frac{\nu^2 \cdot (\nu-3)}{27} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} \cdot \alpha \right).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nun folgendes:

Erstens, da der Kompressionsmodul γ stets eine positive Größe ist, so zeigt Gleichung (32), daß jedenfalls:

$$(36) \quad \nu > 3.$$

Zweitens, da $\nu > 3$, so liefert (35) stets einen positiven Wert für $\partial \alpha / \partial \Theta$. Der Ausdehnungskoeffizient der einatomigen Körper nimmt stets mit steigender Temperatur zu und zwar wächst er bei hohen Temperaturen schneller als bei niedrigen.

Aus diesem gleichförmigen Verlauf der thermischen Ausdehnung ist zu ersehen, daß die Zustandsgleichung (28) die Diskontinuität beim Schmelzpunkt nicht wiedergibt. Sie kann also höchstens bei Temperaturen, die weit unter dem Schmelzpunkt liegen, als genau geltend angesehen werden. Bei höheren Temperaturen stellt sie nur eine rohe Annäherung dar. Dasselbe muß natürlich von den Hypothesen gelten, auf Grund deren die Gleichung (28), sowie überhaupt die ganze hier entwickelte Theorie gewonnen ist.

Ein sehr merkwürdiges Resultat liefert endlich Gleichung (34), wenn wir sie folgendermaßen schreiben:

$$(37) \quad v_F \cdot \alpha \cdot \gamma = \frac{\nu+2}{2} \cdot R.$$

Da höchstwahrscheinlich das Gesetz der Fernwirkung zwischen den Atomen für alle Stoffe dasselbe ist, also ν eine

universelle Konstante darstellt, so können wir (37) durch folgenden Satz wiedergeben:

Das Produkt aus Molekularvolumen, Kompressionsmodul und thermischem Ausdehnungskoeffizient ist für alle amorphen einatomigen Körper ein und dasselbe Multiplum der Gaskonstante.

Eine scharfe Prüfung dieses Satzes ist leider nicht möglich, da der Kompressionsmodul γ der Metalle meist nicht sicher feststeht. Da er nämlich direkt schwer zu messen ist, so berechnet man ihn aus dem Dehnungsmodul ϵ und der Elastizitätszahl μ nach der Formel:

$$\gamma = \frac{\epsilon}{3 \cdot (1 - 2\mu)}.$$

Wären nun die Metalle wirklich amorphe Körper, so müßte sich, wie Poisson gezeigt hat, $\mu = 0,25$ ergeben, also $\gamma = \frac{2}{3} \cdot \epsilon$. Die experimentellen Bestimmungen von μ liefern sehr schwankende Werte, aus denen man aber doch immerhin ziemlich sicher ansehen kann, daß μ im allgemeinen nicht 0,25 ist. Es liegt das daran, daß die Metalle eine fein kristallinische Struktur haben, die auch sonst die Beobachtungsergebnisse trübt. Es scheint, als ob deswegen die Formeln der Elastizitätstheorie überhaupt nicht ohne weiteres auf die Metalle anwendbar sind. Ich habe daher in der folgenden Tab. 2 einfach $\gamma = \frac{2}{3} \cdot \epsilon$ gerechnet, habe aber in Klammern noch den nach der Formel der Elastizitätstheorie berechneten Wert hinzugefügt. Die Zahlen sind von W. Voigt¹⁾ an Stäben ermittelt, die aus dem Innern gegossener Blöcke ausgeschnitten sind.

Ich habe als letztes noch das flüssige Quecksilber hinzugefügt. Man sieht, daß dies einen ganz anderen Wert für $v_F \cdot \alpha \cdot \gamma$ liefert. Die Theorie gibt wahrscheinlich überhaupt für die geschmolzenen Metalle nur ganz rohe Näherungswerte.

Die festen Metalle erfüllen dagegen die Relation

$$v_F \cdot \alpha \cdot \gamma = \text{konst.}$$

ungefähr, und zwar um so besser, je homogener und dichter sie sind, und je näher ihr μ dem Poissonschen Werte 0,25 liegt. Auch wenn man andere Zahlen nimmt, als die Voigtschen, so findet man dieses Resultat im wesentlichen be-

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. p. 177. 1893.

Tabelle 2.

| | ν_p | $\alpha \cdot 10^6$ | $\gamma \cdot 10^{-6}$ | $(\gamma \cdot 10^{-6})$ | $\frac{\nu + 2}{2} \cdot R$ | 10μ | Material |
|-------------|---------|---------------------|------------------------|--------------------------|-----------------------------|----------|---|
| Kupfer | 7,18 | 51,3 | 0,727 | (0,495) | 267 | 14—20 | Dicht, aber scheinbar nicht ganz homogen. |
| Magnesium | 13,4 | 78,2 | 0,284 | (0,280) | 297 | 23—27 | Rein, dicht, sehr gute Übereinstimmung der Einzelmessungen. |
| Aluminium | 10,1 | 69,2 | 0,434 | (0,483) | 303 | 23—29 | Dicht, etwas inhomogen. |
| Stahl | 7,11 | 34,4 | 1,353 | (1,460) | 332 | ca. 27 | Gute Übereinstimmung der Einzelmessungen. |
| Nickel | 6,68 | 39,4 | 1,360 | (1,700) | 358 | 26—39 | Dicht, gute Übereinstimmung der Einzelmessungen. |
| Silber | 10,3 | 57,8 | 0,519 | (0,708) | 309 | 30—34 | Dicht, anderes Silber gibt andere Werte. |
| Gold | 10,2 | 42,4 | 0,506 | (0,747) | 219 | 33? | ? |
| Wismut | 20,7 | 41,0 | 0,213 | (0,250) | 181 | 22—35 | Grobkristallinisch, starke Schwankungen der Einzelmessungen. |
| Zink | 9,07 | 75,3 | 0,688 | (1,01) | 470 | 26—38 | Grobkörnig, starke Schwankungen der Einzelmessungen. |
| Kadmium | 12,9 | 74,1 | 0,472 | — | 452 | 41—50 | Scheinbar dicht, starke Schwankungen der Einzelmessungen. |
| Zinn | 16,2 | 66,6 | 0,361 | — | 389 | 49—66 | Dicht, scheint durch die mechanische Bearbeitung geändert zu werden. Die Einzelmessungen schwanken stark. |
| Quecksilber | 14,7 | 181 | 0,206 | — | 680 | — | Flüssig. |

stättigt. Und zwar ergibt sich $(\nu + 2)/2 \cdot R \sim 300$. Nun ist aber $3,5 \cdot R = 297$, wir setzen deswegen:

$$(38) \quad \nu = 5.$$

Die elastische Kraft des Atoms ist ungefähr der sechsten Potenz des Abstandes vom Zentrum umgekehrt proportional.

Der ganz abweichende Wert, den das Quecksilber liefert, wird wohl damit zusammenhängen, daß seine spezifische Wärme schon bei gewöhnlicher Temperatur stark variabel ist, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Tabelle 3.

Spezifische Wärme des Quecksilbers.

| | 0° | 100° | 200° | 300° |
|-----------------|------|------|------|------|
| $\frac{c_p}{R}$ | 3,33 | 3,26 | 3,20 | 3,15 |
| $\frac{c_v}{R}$ | 2,94 | 2,70 | 2,43 | 2,21 |

Unsere Theorie setzt stets voraus, daß konstant $c_v = 3 R$ ist.

12. Wir wollen endlich noch Formel (32) benutzen, um die wichtige Größe $B \cdot v_F^{-\nu/3}$, die wir in Formel (27) aus der Dampfspannungskurve zu berechnen wußten, auf einem zweiten gänzlich verschiedenen Wege zu finden. Es ergibt sich:

$$(39) \quad B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{9}{\nu \cdot (\nu - 3)} \cdot (R\Theta + \gamma \cdot v_F) = 0,9 \cdot (R\Theta + \gamma \cdot v_F).$$

oder auch:

$$(40) \quad B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{9}{\nu \cdot (\nu - 3)} \cdot R \left(\Theta + \frac{\nu + 2}{2\alpha} \right) = 0,9 \cdot \left(R\Theta + \frac{300}{\alpha} \right).$$

Es ist dies in der Tat eine Zahl, die mit der Temperatur nur sehr wenig variiert, weil das nahezu konstante Glied $300/\alpha$ von einer höheren Größenordnung ist als $R\Theta$.

Kombiniert man (40) mit (35), so erhält man:

$$\partial \alpha / \partial \Theta = (\nu/3 + 2/(\nu + 2)) \alpha^2 = 1,95 \cdot \alpha^2.$$

Die Vergleichung der so berechneten Größe mit den experimentell gefundenen Werten zeigt wiederum, daß die Zustandsgleichung (28) das Verhalten der Metalle in den Details nicht genau wiedergibt:

Tabelle 4.

| | berechnet | H. Fizeau | W. Voigt |
|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Kupfer | 0,005 · 10 ⁻⁶ | 0,061 · 10 ⁻⁶ | 0,121 · 10 ⁻⁶ |
| Magnesium | 0,012 | 0,205 | 0,192 |
| Aluminium | 0,009 | 0,069 | 0,183 |
| Stahl | 0,002 | 0,061 | 0,156 |
| Nickel | 0,003 | 0,021 | 0,124 |
| Silber | 0,007 | 0,044 | 0,129 |
| Gold | 0,004 | 0,025 | 0,072 |
| Wismut | 0,003 | 0,083 | 0,156 |
| Zink | 0,011 | -0,038 | — |
| Kadmium | 0,011 | 0,098 | — |
| Zinn | 0,009 | 0,105 | — |

Beispiele: Zink, Kadmium, Quecksilber.

13. Wir wollen im folgenden, wie es üblich ist, die Dampfspannung p in Millimeter Quecksilber angeben. Bleiben wir im übrigen in dem bisher gebrauchten Maßsystem, so müssen wir Formel (4) folgendermaßen schreiben:

$$p = 735,5 \cdot C \cdot R^{-1/2} \cdot \Theta^{-1/2} \cdot e^{-\frac{Q_0}{R \cdot \Theta} + 1/2}.$$

Wenn wir diese Gleichung logarithmieren, so bekommen wir:

$$\log p + \frac{1}{2} \cdot \log \Theta + \frac{0,4343 \cdot Q_0}{84,8 \cdot \Theta} = \log C + 2,5536.$$

Wir wollen vorübergehend setzen:

$$\frac{0,4343 \cdot Q_0}{84,8} = a, \quad \log C + 2,5536 = \log C'.$$

Ist uns nun die Dampfdruckkurve gegeben, so bestimmen wir zuerst einen Wert a in der Weise, daß die Summe $\log p + 0,5 \cdot \log \Theta + a/\Theta$ einen möglichst konstanten Wert für $\log C'$ ergibt, und berechnen darauf Q_0 und C .

In der folgenden Tab. 5 ist in dieser Weise die Dampfdruckkurve des Zinks zwischen 700° und 900° nach den Messungen von Barus benutzt. Die Dampfdrucke sind von 20° zu 20° aus den von Barus angegebenen Zahlen interpoliert.

Tabelle 5.

Zink.

| Θ | p | $\log p$ | $0,5 \cdot \log \Theta$ | a/Θ | $\log C$ |
|----------|-----|----------|-------------------------|------------|----------|
| 973 | 35 | 1,55 | 1,50 | 7,24 | 10,29 |
| 998 | 49 | 1,69 | 1,50 | 7,10 | 10,29 |
| 1018 | 65 | 1,82 | 1,50 | 6,96 | 10,28 |
| 1038 | 102 | 2,01 | 1,51 | 6,82 | 10,34 |
| 1058 | 138 | 2,12 | 1,51 | 6,69 | 10,32 |
| 1073 | 163 | 2,21 | 1,51 | 6,56 | 10,28 |
| 1098 | 215 | 2,33 | 1,52 | 6,44 | 10,29 |
| 1118 | 269 | 2,43 | 1,52 | 6,32 | 10,27 |
| 1138 | 356 | 2,55 | 1,53 | 6,21 | 10,29 |
| 1153 | 456 | 2,64 | 1,53 | 6,10 | 10,27 |
| 1173 | 557 | 2,74 | 1,54 | 6,00 | 10,28 |

Hier ist gesetzt $a = 7040$. Der Mittelwert von $\log C = 10,29$. Mit diesen beiden Zahlen berechnet sich der Siedepunkt des Zinks ($p = 760$) zu $\Theta = 1200$, d. h. 927° Cels.

Man erhält ferner:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die Zustandsgleichung ergibt:

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{1}{8} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} = 0,36 \cdot 10^6 \text{ kg cm,}$$

wenn man setzt $\Theta = 1200$.

Man kann danach ungefähr taxieren:

$$B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm; } A \cdot v_F^{-1} \sim 2,9 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die totale Verdampfungswärme des Zinks ergibt sich in cal/g zu: $492 - \Theta/65,4$, also beim Siedepunkt: 474.

Ferner erhält man:

$$C = 55 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} = 0,6 \cdot 10^6 \text{ (Formel (27)).}$$

Dabei habe ich das spezifische Gewicht des geschmolzenen Zinks zu ca. 6,6 geschätzt, also $v_F = 10$ gesetzt, ferner habe ich einfach $k = 1$ gesetzt.

Bei gewöhnlicher Temperatur ($\Theta = 300$, $v_F = 9,2$) bekommt man nach (40) den Wert $3,1 \cdot 10^6$, also für $v_F = 10$ umgerechnet: $2,7 \cdot 10^6$. Dieser Wert ist bedeutend größer als der aus der Dampfdruckkurve gefundene. Es liegt das offenbar daran, daß die Zustandsgleichung für das geschmolzene Zink nur eine grobe Annäherung darstellt.

Setzen wir $B \cdot v_F^{-7/8} = 0,6 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda_w}{r_0} = 0,18 \text{ bei } \Theta = 1200^\circ.$$

Die Ausschläge der Atome sind danach in der Tat schon zu groß, als daß man die höheren Potenzen weglassen darf, während es bei niedrigen Temperaturen (300° , 400°) noch angeht.

Wir diskutieren nun in derselben Weise die Messungen, die Barus am Kadmium gemacht hat. Wir benutzen die Dampfdrucke zwischen 560° und 760° , von 20° zu 20° fortschreitend.

Tabelle 6.

Kadmium.

| Θ | p | $\log p$ | $0,5 \cdot \log \Theta$ | a/Θ | $\log C'$ |
|----------|-----|----------|-------------------------|------------|-----------|
| 833 | 26 | 1,41 | 1,46 | 7,36 | 10,23 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 893 | 75 | 1,87 | 1,48 | 6,87 | 10,22 |
| 913 | 107 | 2,03 | 1,48 | 6,72 | 10,23 |
| 933 | 143 | 2,16 | 1,49 | 6,58 | 10,23 |
| 953 | 187 | 2,27 | 1,49 | 6,44 | 10,20 |
| 973 | 264 | 2,42 | 1,49 | 6,31 | 10,22 |
| 993 | 330 | 2,52 | 1,50 | 6,18 | 10,20 |
| 1013 | 455 | 2,66 | 1,50 | 6,05 | 10,21 |
| 1033 | 624 | 2,79 | 1,51 | 5,93 | 10,23 |

Hier ist gesetzt $a = 6130$. Wir haben bekommen $\log C' = 10,22$. Mit diesen beiden Werten berechnet sich der Siedepunkt des Kadmiams ($p = 760$) zu: $\Theta = 1050$, d. h. 777° Cels.

Ferner bekommen wir:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v^{-\frac{7}{8}} = 1,20 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die Zustandsgleichung gibt für $\Theta = 1050$:

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{5}{8} B \cdot v_F^{-\frac{5}{8}} = 0,32 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{5}{8}} \sim 1,3 \cdot 10^6 \text{ kg cm; } A \cdot v_F^{-1} \sim 2,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die totale Verdampfungswärme des Kadmiums in cal/g ergibt sich aus dem gefundenen Werte von Q_0 zu: $250 - \Theta/112$, also beim Siedepunkt: 241.

Das spezifische Gewicht des geschmolzenen Kadmiums ist von Vicentini und Omodei bestimmt. Es beträgt beim Siedepunkt ungefähr 7,7. Also $v_F = 14,5$. Wir berechnen nun aus C' die mit C bezeichnete Konstante und wenden Formel (27) an, indem wir setzen $k = 1$:

$$C = 47 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{5}{8}} = 0,68 \cdot 10^6.$$

Bei gewöhnlicher Temperatur ($\Theta = 300$, $v_F = 13,0$) bekommt man nach (40): $2,9 \cdot 10^6$. Multipliziert man nun mit $(13,0/14,5)^{5/8}$, so bekommt man den Wert beim Siedepunkt, nämlich: $2,4 \cdot 10^6$, also wie beim Zink zu groß.

Setzen wir $B \cdot v_F^{-5/8} = 0,7 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda_w}{r_0} = 0,12 \text{ bei } \Theta = 1050,$$

also wieder allzugroße Ausschläge.

Das Quecksilber zeigt schon weit unter seinem Siedepunkt so starke Abweichungen seiner spezifischen Wärme von dem normalen Werte $3 \cdot R$ (vgl. 11.), daß man vermuten sollte, die Formel (4) verlöre hier ihre Gültigkeit. Die Messungen der Dampfspannung bei niedrigen Temperaturen, wo man die Formel noch für anwendbar halten könnte, haben nun aber so unsichere Resultate ergeben, daß man aus ihnen die Größen Q_0 und C nicht gut berechnen kann. Merkwürdigerweise scheinen aber die Untersuchungen von H. Hertz¹⁾ zu zeigen, daß man mit der Formel (4), indem man C und Q_0 konstant hält und dem Exponenten von $R \cdot \Theta$ den Wert 0,5 läßt, weit über das Gebiet hinaus extrapolieren kann, wo diese Zahl 0,5 wirklich

1) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 193. 1882.

als $(c_F - c_G - R)/R$ gedeutet werden kann. In der folgenden Tab. 7 sind die von H. Hertz angegebenen Werte zwischen 80° und 180° zu Grunde gelegt.

Tabelle 7.
Quecksilber.

| Θ | p | $\log p$ | $0,5 \cdot \log \Theta$ | a/Θ | $\log C$ |
|----------|-------|----------|-------------------------|------------|----------|
| 353 | 0,098 | 0,97-2 | 1,27 | 9,26 | 9,50 |
| 363 | 0,165 | 0,22-1 | 1,28 | 9,01 | 9,51 |
| 373 | 0,285 | 0,45-1 | 1,29 | 8,77 | 9,51 |
| 383 | 0,478 | 0,68-1 | 1,29 | 8,54 | 9,51 |
| 393 | 0,779 | 0,89-1 | 1,30 | 8,33 | 9,52 |
| 403 | 1,24 | 0,09 | 1,30 | 8,12 | 9,51 |
| 413 | 1,93 | 0,28 | 1,31 | 7,92 | 9,51 |
| 423 | 2,93 | 0,47 | 1,31 | 7,73 | 9,51 |
| 433 | 4,36 | 0,64 | 1,32 | 7,55 | 9,51 |
| 443 | 6,41 | 0,81 | 1,32 | 7,38 | 9,51 |
| 453 | 9,23 | 0,96 | 1,33 | 7,22 | 9,51 |

Ich habe hier gesetzt $a = 3270$ und bekomme $\log C = 9,51$. Mit diesen beiden Zahlen berechnet sich der Siedepunkt des Quecksilbers zu: $\Theta = 625$, d. h. 352° Cels.

Man erhält ferner:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} = 0,64 \cdot 10^6,$$

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{8}{3} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} = 0,12 \cdot 10^6,$$

für $\Theta = 400$, also:

$$B \cdot v_F^{-\frac{v}{8}} \sim 0,8 \cdot 10^6 \text{ kg cm}; \quad A \cdot v_F^{-1} \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm}.$$

Aus Q_0 ergibt sich, unter der Annahme, daß Formel (2) gültig bleibt, wenn man $(c_F - c_G)$ einfach durch $1,5 \cdot R$ ersetzt, für die totale Verdampfungswärme der Wert $75 - \Theta/200$ cal/g. Beim Siedepunkt also: 72 cal/g. Gemessen ist von Person: 62.

Ferner erhält man:

$$C = 9,1 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v^{-\frac{v}{8}} = 0,235 \cdot 10^6 \text{ nach Formel (27).}$$

Dabei ist als spezifisches Gewicht des Quecksilbers bei $\Theta = 400$ gerechnet: 13,3, also $v_F = 15$.

Bei derselben Temperatur ($\Theta = 400$) ergibt die Formel (40): $1,5 \cdot 10^6$, also einen Wert, der den aus C berechneten ($0,235 \cdot 10^6$) noch mehr übersteigt, als es die analogen Zahlen beim Zink und beim Kadmium taten.

Setzen wir $B \cdot v^{-7/3} = 0,24 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich: $\lambda_w/r_0 = 0,17$ bei $\Theta = 400^\circ$, und gar 0,22 beim Siedepunkt.

Potentialsprung und Ionisationsenergie.

14. Wenn man das in 13. aufgeführte Zahlenmaterial überblickt, so wird es einem ziemlich wahrscheinlich, daß die dieser Arbeit zu Grunde gelegten Hypothesen wohl genügen dürften, um das thermische Verhalten der Metalle zu erklären, und daß man die Theorie nur in zwei Punkten vervollständigen müßte.

Erstens sind noch die Kräfte einzuführen, die den Schiebungen entgegenwirken, da wir ohne diese Kräfte den in Formel (22) eingeführten Faktor k nicht berechnen können.

Zweitens sind die Potenzreihen für die potentielle Energie und das Virial der elastischen Atomkräfte noch um mehrere Glieder fortzusetzen.

Die Durchführung dieser zweiten Operation würde den Erfolg haben, daß auch die geschmolzenen Metalle in die Theorie miteinbegriffen wären. Denn es scheint, als ob der flüssige Aggregatzustand sich von dem festen eben dadurch unterscheidet, das bei ihm die Glieder höherer Ordnung wegen der starken Ausschläge der Atome wesentlich mit in Betracht kommen, während sie bei diesem noch weggelassen werden können.

Wenn wir die Größen $B \cdot v_F^{-7/3}$ und C nach der Formel (40) berechnen, so dürfen wir immerhin annehmen, daß wir die Größen bekommen, die für die Dampfdruckkurve des festen Metalles charakteristisch sind, wenn auch diese Kurve von der des geschmolzenen Metalles vielleicht ziemlich stark abweicht. Den Faktor k können wir wohl in erster Annäherung gleich 1 setzen. Ehe die Theorie weiter entwickelt wird, schien es mir sehr wünschenswert, dies zu prüfen. In der Tat

gibt es ja eine gewisse Art von Dampfspannung fester Metalle, die der Messung zugänglich ist, nämlich ihr elektrolytischer Lösungsdruck im Wasser.

Man kann auf rein thermodynamischem Wege leicht für Lösungsdruck und Ionisationsenergie ganz analoge Formeln herleiten, wie die in 2. hingeschriebenen, von denen wir in der Theorie des Dampfdruckes ausgegangen sind. Wir bezeichnen jetzt mit Q die innere Ionisationsenergie, ausgedrückt in Joule, d. h. diejenige Energie, die man *zuführen* muß, um ein Grammatom des Metalles in die Lösung zu bringen, ferner mit Ψ den Potentialsprung vom Metall zur Lösung in Volt, mit c_F und c_J die spezifische Wärme des festen und des gelösten Metalles, gerechnet pro Grammatom in Joule/Grad Celsius, mit z die Valenz eines Metallatoms, mit p den osmotischen Druck des gelösten Metalles; R , Θ seien wieder Gaskonstante und absolute Temperatur, endlich $F = 96540$ Coulomb die elektrische Ladung eines Grammäquivalents Ionen. In dem gewählten Maßsystem ist $R = 8,31$, die Druckeinheit ist 10,2 kg/qcm, ferner ist 1 cal = 4,19 Joule.

Wir erhalten dann ganz analog den Formeln (2) und (4):

$$(41) \quad Q = Q_0 - (c_F - c_J) \cdot \Theta,$$

$$(42) \quad p = C' \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q - \Psi \cdot z \cdot F}{R \cdot \Theta}}$$

In Formel (42) tritt in die Exponentialfunktion auch hier diejenige Energie ein, welche der Substanz pro Grammatom von außen zugeführt werden muß, damit sie in den Ionenzustand übergeht. Da jedes Grammatom die Ladung $z \cdot F$ besitzt, und folglich beim Durchgang durch die elektrische Doppelschicht auf der Trennungsfläche Metall-Lösung die Energie $\Psi \cdot z \cdot F$ gewinnt, so bleibt als die noch von außen hinzuzufügende Energie: $Q - \Psi \cdot z \cdot F$.

Man kann (42) auch noch in mehreren anderen Formen hinschreiben. Es sei P der sogenannte Lösungsdruck des Metalles, dann ist bekanntlich:

$$\Psi = \frac{R \cdot \Theta}{z \cdot F} \cdot \ln \frac{p}{P},$$

also:

$$(43) \quad P = C' \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Führt man an der elektrischen Doppelschicht Metall-Elektrolyt den bekannten Helmholtz'schen Kreisprozeß aus, so bekommt man die Beziehung:

$$Q = F \cdot z \cdot \Psi - F \cdot z \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \cdot \Theta$$

also:

$$(44) \quad p = C' \cdot (R \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{F \cdot z}{R} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}}.$$

Für praktische Rechnungen bekommt man die bequemste Form, wenn man die Konzentration der Lösung η einführt, ausgedrückt in Grammäquivalent pro Kubikzentimeter. Ist v_J das Volumen, welches ein Grammatom Ionen enthält, so ist:

$$\eta = \frac{z}{v_J}.$$

Nun ist aber:

$$p \cdot v_J = R \cdot \Theta,$$

folglich:

$$(45) \quad \eta = z \cdot C' \cdot (R \Theta)^{-\frac{c_F - c_J}{R}} \cdot e^{-\frac{Q - \Psi \cdot z \cdot F}{R \Theta}}.$$

Die Aufgabe der kinetischen Theorie wird es nun sein, für die Größen C' und Q_0 Beziehungen zu anderen Eigenschaften der Metalle und des Wassers zu finden. Es dürfte aber jetzt wohl noch verfrüht sein, den Versuch einer solchen Theorie zu machen. Denn dazu wissen wir über die Lösungen doch noch zu wenig, ist doch nicht einmal der Wert von c_J/R bekannt!

Trotzdem läßt sich schon aus der im vorigen entwickelten kinetischen Theorie der Metalle ein recht interessanter Schluß ziehen. Aus Formel (14) geht nämlich hervor, daß die Größe C' sich jedenfalls als ein Quotient zweier Größen:

$$(46) \quad C' = C_F / C_J$$

ergeben wird, von denen die erste C_F identisch ist mit der in der Dampfspannungstheorie mit C bezeichneten Größe, die wir nach Formel (40) berechnen können. C_J dagegen hängt davon ab, in welcher Weise sich das Ion im Wasser bewegt. Wir werden jedenfalls so viel sagen können, daß C_J für verschiedene Ionen nicht wesentlich verschieden sein kann.

15. Logarithmieren wir die Gleichung (45), so bekommen wir:

$$\frac{\frac{1}{\alpha} \cdot Q - F \cdot \Psi}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{\alpha} \ln C_F + \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{\alpha}{\eta \cdot C_J} \right) - \frac{c_F - c_J}{\alpha \cdot R} \cdot \ln(R \cdot \Theta).$$

Ich habe nun $\ln C_F$ nach (40) für eine ganze Reihe von Metallen berechnet und gefunden, daß sich Unterschiede ergeben, die gegenüber den Fehlern in der Bestimmung von Q und Ψ nur unbedeutend sind, es ist nämlich für alle Metalle:

$$\ln C_F = 20,9 \pm 1,2.$$

Nehmen wir ferner an, daß, geradeso wie c_F , auch c_J für alle Metalle denselben Wert hat, und setzen wir im folgenden stets $\eta = 10^{-8}$ (Normallösung), so ist

$$(47) \quad \frac{\frac{1}{\alpha} \cdot Q - F \cdot \Psi}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{\alpha} \cdot K,$$

wo K eine Größe ist, die bei einer bestimmten Temperatur für alle Metalle, abgesehen von kleinen Änderungen (± 1), denselben Wert hat.

Bekanntlich ist es bisher noch nicht möglich gewesen, auf eine ganz einwandfreie Art Q und Ψ absolut zu messen. $1/\alpha \cdot Q$ ist nach den thermochemischen Messungen von J. Thomsen für viele Metalle bekannt, relativ zum Wasserstoff. Wenn man das betreffende Metall in einer verdünnten, starken (d. h. möglichst dissoziierten) Säure auflöst, so ist die Wärmetönung pro Grammäquivalent:

$$Q_H - \frac{1}{\alpha} \cdot Q = - \frac{1}{\alpha} \cdot Q',$$

wenn wir mit Q_H die Ionisationsenergie des Wasserstoffgases bezeichnen.

Ebenso mißt man den Potentialsprung Ψ immer relativ zu einer Normalelektrode, deren Potentialsprung man willkürlich gleich Null setzt.

So nimmt beispielsweise N. T. N. Wilsmore¹⁾, dessen Angaben ich den folgenden Rechnungen zu Grunde legen werde, als Normalelektrode ein mit Wasserstoff gesättigtes Platinblech

1) N. T. M. Wilsmore, Zeitschr. f. phys. Chem. 35. p. 291. 1900.

in einer Normalsalzsäurelösung. Nenne ich den Potentialsprung dieser Normalelektrode ψ_0 , so ist gemessen:

$$\psi' = \psi - \psi_0.$$

Ich führe nun eine weitere Konstante K' ein:

$$(48) \quad K' = (Q_H - F \cdot \psi_0) / R \cdot Q.$$

Dann ist:

$$(49) \quad \frac{\frac{1}{2} Q' - F \cdot \psi'}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{2} \cdot K + K'.$$

Ich prüfe diese Gleichung zunächst an einer Reihe zweiwertiger Metalle. Die Energien $\frac{1}{2} Q'$ gebe ich in großen Kalorien an, die aufgeführten Zahlen sind also noch mit 4190 zu multiplizieren, damit wir sie in dem in den Formeln benutzten Maßsystem (Joule) bekommen:

Tabelle 8.

| | $\frac{1}{2} Q'$ | ψ' | $\frac{1}{2} K + K'$ |
|---------|---------------------|---------|----------------------|
| Mangan | -24,7 | -1,075 | -0,2 |
| Zink | -17,1 | -0,770 | +1,0 |
| Kadmium | - 9,3 ¹⁾ | -0,421 | +0,67 |
| Eisen | -10,7 | -0,343 | -4,7 |
| Kobalt | - 8,1 | -0,232 | -4,6 |
| Nickel | - 7,6 | -0,228 | -8,9 |
| Blei | + 1,2 ¹⁾ | -0,186 | +7,0 |
| Kupfer | + 8,0 | +0,336 | +0,4 |

Während die ganz verschiedenartigen Metalle Mangan, Zink, Kadmium, Kupfer eine gute Übereinstimmung in ihrem Verhalten zeigen, weicht merkwürdigerweise die Gruppe Eisen, Kobalt, Nickel davon beträchtlich ab, gibt aber wieder unter sich übereinstimmende Zahlen. Ganz abseits von allen übrigen Metallen steht das Blei. Was der Grund für diese Anomalien ist, darüber weiß ich nichts zu sagen. Um den Durchschnittswert von $\frac{1}{2} K + K'$, den die vier zuerst erwähnten Metalle geben, nämlich 0,5, auch beim Eisen und Blei zu erreichen, müßten wir den Potentialsprung des ersteren um -0,13 Volt,

1) Diese Werte, die etwas von den von W. Ostwald (Zeitschr. f. physik. Chem. 11. p. 501. 1893) angegebenen abweichen, habe ich, wie auch die übrigen, direkt aus den Thomsenschen Daten erhalten.

den des anderen Metalles um $+0,16$ Volt ändern. Jedenfalls werde ich rechnen:

$$\frac{1}{2} K + K' = +0,5.$$

Von einwertigen Metallen sind gut bekannt nur Thallium und Silber:

Tabelle 9.

| | Q | Ψ' | $K + K'$ |
|----------|-----------|----------|----------|
| Thallium | $+0,8^1)$ | $-0,322$ | $13,7$ |
| Silber | $+25,75$ | $+0,771$ | $13,4$ |

Wir haben also:

$$K + K' = 13,5.$$

Mithin:

$$K = 26, \quad K' = -12,5.$$

16. Wir wollen nun den so gefundenen Wert von K in Gleichung (47) einsetzen und zugleich beachten, daß

$$\frac{1}{2} \cdot Q - F \cdot \Psi = -F \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \cdot \Theta.$$

Es ergibt sich:

$$(50) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{R \cdot K}{F} = -\frac{1}{x} \cdot 0,00224 \text{ Volt}.$$

Und zwar ist nach dem, was wir oben über die Zahl $\ln C_F$ sahen, zu vermuten, daß dieser Wert bei den verschiedenen Metallen höchstens um 5 Proz. vom Mittel abweicht.

Der Temperaturkoeffizient des Potentialsprunges Metall-Elektrolyt ist negativ und hat für alle gleichwertigen Metalle merklich den gleichen Wert. Der Temperaturkoeffizient für verschiedenwertige Metalle verhält sich umgekehrt wie die Valenzzahlen.

Aus diesem Satz erkennt man ohne weiteres, daß alle chemischen Ketten mit zwei gleichwertigen Elektrodenmetallen, deren Lösung ihre Konzentration mit der Temperatur nicht ändert, ganz verschwindend kleine Temperaturkoeffizienten haben müssen. So beträgt er z. B. beim Daniellschen Element $0,000034$ Volt.

1) Vgl. die Anmerkung auf der vorigen Seite.

Obwohl wir im stande sind, den Temperaturkoeffizienten des Potentialsprunges Metall-Elektrolyt absolut anzugeben (und zwar, wenn noch die spezifische Wärme der Ionen c_r bekannt wäre, sogar für alle Temperaturen), so können wir daraus leider den absoluten Wert des Potentialsprunges selber noch nicht ermitteln. Dazu muß noch eine zweite Konstante gegeben sein, z. B. Q_0 , und es ist abzuwarten, ob die kinetische Theorie im stande sein wird, genaueres über diese Größe zu ermitteln.

Greifswald, April 1903.

(Eingegangen 21. April 1903.)

2. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber; von Gottlieb Kučera.

(Fortsetzung von p. 529.)

(Tafeln hierzu sind dem vorigen Hefte beigelegt.)

V. *Die maximale Oberflächenspannung.* Die Beobachtungs- und Berechnungsmethode ist schon im Abschnitt IV erklärt worden. Hier werden vor allem die Tabellen mit allen Resultaten zusammengestellt, die zur Konstruktion der Elektrokapillarkurven nötig sind; die Zahlen, wie schon erwähnt, geben die Oberflächenspannungen in einer willkürlichen Einheit an. Bei jedem Versuch ist außer dem spezifischen Gewichte σ , jeder Lösung auch die mittlere Versuchstemperatur t mitsamt ihren Schwankungen angegeben.

Auf den beigelegten Taf. II u. III sind die Versuchsergebnisse graphisch dargestellt. Alle Kurven haben das charakteristische Aussehen der bekannten Elektrokapillarkurven, wobei sich die gemessenen Punkte sehr gut in eine glatte Kurve einfügen lassen. Nur bei den Salzen ist hie und da eine merkliche Abweichung; einen möglichen Grund dafür werden wir im folgenden Abschnitt kennen lernen. Zu einem Vergleich meiner Resultate mit den nach einer „statischen“ Methode gewonnenen Kurven habe ich die H_2SO_4 -Kurve, welche Paschen¹⁾ mit seinem „3 mm-Rohr“ beobachtet hatte, benutzt. Er gibt für verschiedene Polarisierungen an, um wieviel Prozent der maximalen Erhöhung die Oberflächenspannung über diejenige bei Kurzschluß gestiegen ist. Seine Säure war etwa 26 Proz. Ich habe nun aus meinen Daten für eine 17,1 Proz. und 36,3 Proz. H_2SO_4 bei Kurzschluß und bei maximaler Oberflächenspannung die Mittel bestimmt, die so gewonnenen Zahlen den Oberflächenspannungen 0 und 100 bei Paschen zugeordnet, und seine übrigen Angaben danach umgerechnet. So entstand die Tab. 16, wo unter I. die ursprünglichen, unter II. die berechneten Werte eingetragen sind. Die in Daniell an-

1) F. Paschen, Wied. Ann. 39. p. 43. u. 51. 1890.

Tabelle 10.
H₂SO₄.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------|
| $\sigma_{230} = 1,0000$ | $\sigma_{20,1} = 1,0113$ | $\sigma_{19,5} = 1,0559$ | $\sigma_{20,2} = 1,1194$ | $\sigma_{20,3} = 1,2733$ | $\sigma_{21,5} = 1,7350$ | $\sigma_{20,0} = 1,835$ | |
| $t = 18,6^\circ \pm 0,1$ | $t = 18,2^\circ \pm 0,1$ | $t = 18,1^\circ \pm 0,2$ | $t = 18,0^\circ \pm 0,1$ | $t = 18,2^\circ \pm 0,1$ | $t = 20,0^\circ \pm 0,2$ | $t = 20,0^\circ$ | |
| 0 | 209,15 | 209,1 | 204,3 | 200,4 | 189,5 | 151,7 | 147,6 |
| - 0,100 | 227,3 | 226,7 | 221,3 | 217,4 _s | 206,7 _s | 169,7 | — |
| - 0,200 | 242,25 | 240,7 | 235,8 | 232,0 _s | 221,6 _s | 185,0 _s | — |
| - 0,300 | 254,8 _s | 251,8 | 247,2 _s | 243,8 _s | 233,9 | 198,1 _s | — |
| - 0,400 | 263,3 | 260,7 _s | 256,5 | 254,3 | 244,4 | 209,6 | — |
| - 0,500 | 270,5 ^{*)} | 267,3 _s | 264,0 | 262,5 | 253,3 _s | 219,5 _s | — |
| - 0,600 | 273,3 _s | 271,5 | 269,9 _s | 269,0 | 260,8 | 228,6 _s | — |
| - 0,700 | 275,5 | 274,4 | 274,0 | 274,2 | 267,1 _s | 236,5 _s | — |
| - 0,800 | 276,3 | 275,1 | 275,6 | 277,0 | 272,5 | 243,3 | — |
| - 0,900 | 275,8 | 274,4 | 275,5 | 277,4 _s | 276,0 _s | 250,1 | — |
| - 1,000 | 273,5 _s | 272,2 | 273,1 | 274,9 _s | 277,7 _s | — | — |
| - 1,100 | 270,7 | 268,6 _s | 269,4 | 271,9 | 276,9 | — | — |
| - 1,200 | 267,0 _s | 264,2 | 264,2 | 267,0 | 274,0 | — | — |
| - 1,300 | 261,8 | 258,4 | 256,8 _s | 259,6 | 270,6 _s | — | — |
| - 1,400 | 255,9 | 251,3 _s | 253,7 [*] | 249,3 [*] | — | — | — |
| - 1,500 | 248,6 | 245,1 _s | — | — | — | — | — |
| - 1,600 | 241,0 _s | 226,9 [*] | — | — | — | — | — |
| - 1,700 | 234,2 ^{*)} | — | — | — | — | — | — |

*) Bei den mit einem Sternchen versehenen Werten war das Tropfen nicht mehr ganz regelmäßig.

**) Gehört infolge eines Versehens zu 0,520 Volt.

Tabelle 11.
HCl.

| Polarisierende E.M.K. in Volt | HCl. | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|---|--|--|--|
| | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
| | $\sigma_{19,0^\circ} = 1,0006$ $t = 17,9^\circ \pm 0,15^\circ$ | $\sigma_{20,5^\circ} = 1,0039$ $t = 17,8^\circ \pm 0,15^\circ$ | $\sigma_{20,5^\circ} = 1,0200$ $t = 18,1^\circ \pm 0,15^\circ$ | $\sigma_{19,3^\circ} = 1,0633$ $t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{19,0^\circ} = 1,1067$ $t = 18,3^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{18,8^\circ} = 1,1830$ $t = 17,9^\circ \pm 0,1^\circ$ |
| 0 | 241,0 _s | 236,2 | 230,9 _s | 224,3 _s | 221,7 | 215,4 |
| - 0,100 | 256,0 _s | 253,4 | 246,6 _s | 240,8 _s | 237,7 | 230,0 |
| - 0,200 | 265,6 | 263,0 _s | 257,3 | 251,5 | 248,1 _s | 240,8 _s |
| - 0,300 | 272,1 | 270,4 _s | 265,3 | 259,3 | 256,0 | 249,0 |
| - 0,400 | 276,2 _s | 274,9 _s | 270,1 | 264,8 | 261,6 | 255,7 |
| - 0,500 | 278,1 | 276,8 | 273,1 | 268,6 | 265,4 | 259,7 |
| - 0,600 | 278,4 | 277,0 _s | 273,2 | 269,8 _s | 267,4 | 261,3 |
| - 0,700 | 277,2 | 274,8 | 271,2 | 268,6 | 266,8 _s | 261,1* |
| - 0,800 | 274,8 | 271,4 | 267,1 _s | 265,5 _s | 264,7 _s | — |
| - 0,900 | 271,1 | 266,5 | 262,5 _s | 265,9* | 249,8* | — |
| - 1,000 | 265,9 _s | 260,7 _s | 255,7 | 245,3* | — | — |
| - 1,100 | 260,0 _s | 253,0 _s | 247,1 | — | — | — |
| - 1,200 | 253,0 | 244,3 | 237,9* | — | — | — |
| - 1,300 | 243,5 _s | 234,0 _s | — | — | — | — |
| - 1,400 | 230,3 _s | 215,5* | — | — | — | — |
| - 1,500 | 209,8* | — | — | — | — | — |

Tabelle 12.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | KOH | | NaOH | |
|----------------------------------|--|--|--|---|
| | I. | II. | I. | II. |
| | $\sigma_{19,8^\circ} = 1,0554$ $t = 18,4^\circ \pm 0,2^\circ$ | $\sigma_{20,2^\circ} = 1,2146$ $t = 18,9^\circ \pm 0,2^\circ$ | $\sigma_{19,8^\circ} = 1,0460$ $t = 18,1^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{20,0^\circ} = 1,2254$ $t = 18,0^\circ \pm 0,15^\circ$ |
| 0 | 267,7 | 267,1 | 267,9 | 268,6 |
| -0,100 | 272,8 | 273,1 | 271,8s | 273,5 |
| -0,200 | 275,4s | 274,2s | 273,9 | 275,1s |
| -0,300 | 276,1s | 273,5s | 274,5s | 274,2s |
| -0,400 | 274,8s | 270,8s | 273,5s | 271,0s |
| -0,500 | 272,2 | 267,0s | 271,5 | 267,0 |
| -0,600 | 267,8s | 261,8s | 267,7s | 261,7 |
| -0,700 | 261,8 | 255,5s | 262,3s | 255,2s |
| -0,800 | 254,8s | 248,0 | 256,2 | 247,3s |
| -0,900 | 247,4 | 239,0 | 248,7 | 239,0s |
| -1,000 | 239,1 | 229,2 | 240,3 | 229,4 |
| -1,100 | 229,2s | 217,8 | 230,5s | 219,1s |
| -1,200 | 218,5s | 205,5 | 219,9s | 207,6s |
| -1,300 | 206,0s | 192,0 | 207,7 | 195,5s |
| -1,400 | 192,4 | 176,7 | 194,7s | 182,2 |
| -1,500 | 177,7 | 160,2s | 179,6s | 167,5s |
| -1,600 | 161,5s | 143,8 | 168,3 | 152,6 |
| -1,700 | 144,2s | 132,1 | 147,3 | 139,1s |
| -1,800 | 130,1 | 123,7 | 137,2 | 132,1 |
| -1,900 | 120,7 | 119,0s | 127,4s | 127,9 |
| -2,000 | 117,7s | 116,1 | 122,8 | 125,0 |

gegebenen elektromotorischen Kräfte sind in Volt umgewandelt unter der Annahme 1 Daniell = 1,074 Volt.¹⁾

Die Kurve von Paschen, welche unter den meinigen graphisch dargestellt ist, fügt sich vorzüglich zwischen meine eigenen Beobachtungen ein. Die letzten, mit einem Stern in der Tabelle gekennzeichneten Werte sind von Paschen schon bei sichtbarer Entwicklung von Wasserstoff bestimmt worden, und daher ungenau. Bei meinen Versuchen trat sichtbare Elektrolyse immer etwas später als bei Paschen ein, da sich

1) F. Paschen, Wied. Ann. 41. p. 42. u. 54. 1890.

Tabelle 13.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | KCl | | NaCl | |
|----------------------------------|--|--|--|--|
| | I. | II. | I. | II. |
| | $\sigma_{18,0^\circ} = 1,0630$ $t = 17,0^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{16,8^\circ} = 1,1518$ $t = 16,4^\circ \pm 0,2^\circ$ | $\sigma_{20,0^\circ} = 1,0370$ $t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{19,1^\circ} = 1,1756$ $t = 18,6^\circ \pm 0,1^\circ$ |
| 0 | 236,5 | 236,3 _s | 238,2 | 228,8 |
| -0,100 | 252,8 | 251,0 | 250,7 | 244,1 |
| -0,200 | 264,4 | 263,7 _s | 263,6 | 255,2 |
| -0,300 | 275,3 | 274,9 _s | 273,0 | 265,6 _s |
| -0,400 | 282,5 | 291,9 | 278,8 | 273,0 |
| -0,500 | 287,6 | 287,8 _s | 282,8 | 277,3 |
| -0,600 | 288,5 | 289,0 | 285,2 | 277,5 |
| -0,700 | 285,5 | 283,9 _s | 283,7 | 272,6 _s |
| -0,800 | 278,5 | 277,5 | 278,1 _s | 266,0 |
| -0,900 | 270,6 | 270,0 | 271,1 _s | 259,3 _s |
| -1,000 | 261,7 _s | 260,6 | 262,4 | 252,0 |
| -1,100 | 251,6 | 249,9 | 252,8 | 242,8 _s |
| -1,200 | 240,4 | 238,1 | 241,9 | 232,2 _s |
| -1,300 | 229,2 | 226,7 | 200,9 _s | 221,6 |
| -1,400 | 217,7 _s | 214,1 | 219,5 | 208,8 |
| -1,500 | 205,1 | 199,0 | 207,9 | 195,1 _s |
| -1,600 | 190,2 | 182,4 _s | 195,0 | 179,8 |
| -1,700 | 174,2 _s | — | 179,7 | 163,4 _s |
| -1,800 | 157,9 | 145,8* | 163,9 | 147,8 _s |
| -1,900 | 142,4* | — | 149,5 | 136,7 |
| -2,000 | 130,4* | — | 137,7 | 129,3 |

beim Tropfen der Polarisierung immer eine frische Quecksilberoberfläche darbietet.

Für die weiteren Berechnungen war es nötig, aus den beobachteten Kurven die maximalen Oberflächenspannungen zu bestimmen. Dies geschah auf graphischem Wege, indem ich die Elektrokapillarkurven in großem Maßstabe aufzeichnete, und nach der Ostwaldschen Methode¹⁾ der gleichen Oberflächenspannungen die Lage und die Höhe des Maximums ermittelte. Den größten möglichen Fehler dieser Bestimmungen

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 589. 1887.

Tabelle 14.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | KCN | | KJ | | |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | I. | II. | I. | II. | III. |
| | $\sigma_{20,0^\circ} = 1,0098$ | $\sigma_{20,6^\circ} = 1,0833$ | $\sigma_{19,0^\circ} = 1,0200$ | $\sigma_{18,8^\circ} = 1,1914$ | $\sigma_{19,2^\circ} = 1,2514$ |
| | $t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 17,0^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 17,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 17,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 17,0^\circ \pm 0,1^\circ$ |
| +0,300 | — | 267,5* | — | — | — |
| +0,200 | 269,4s | 268,4* | — | — | — |
| +0,170 | 269,4s | 262,1s | — | — | — |
| +0,140 | 269,5 | 265,7 | — | — | — |
| +0,100 | 269,4s | 267,5 | — | — | — |
| +0,060 | 269,5 | — | — | — | — |
| +0,050 | — | 268,0 | — | — | — |
| +0,030 | 269,8 | — | — | — | — |
| ± 0 | 269,1s | 266,1 | 208,7s | 215,6 | 217,8 |
| -0,100 | 267,5s | 261,1 | 243,8 | 239,7 | 239,8s |
| -0,200 | 268,7s | 254,7 | 260,3 | 252,8s | 251,6s |
| -0,300 | 258,4 | 247,4 | 270,1 | 261,7s | 259,9 |
| -0,400 | 258,0s | 238,7 | 271,9s | 268,8 | 262,4s |
| -0,500 | 245,9 | 229,8s | 269,7s | 261,6 | 261,2s |
| -0,600 | 237,6 | 219,8 | 264,5 | 257,0 | 256,5 |
| -0,700 | 228,5s | 208,1 | 257,8 | 250,1 | 249,1 |
| -0,800 | 218,2 | 195,5 | 250,0s | 241,1 | 239,8 |
| -0,900 | 207,6s | 181,9s | 242,1 | 229,5 | 227,8 |
| -1,000 | 194,2s | 164,4 | 232,7s | 217,4s | 214,4 |
| -1,100 | 179,9 | — | 221,7s | 201,4 | 199,2 |
| -1,200 | — | — | 209,3 | 187,4 | 183,8 |
| -1,300 | — | — | 195,8 | 171,3 | 167,2 |
| -1,400 | — | — | 181,5s | 154,0s | 149,7 |
| -1,500 | — | — | 165,8 | 138,0 | 135,6 |
| -1,600 | — | — | 147,0 | 125,2 | 125,7 |
| -1,700 | — | — | 135,6 | 117,8 | 117,4s |

Tabelle 15.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | Wasser | | Äthylalkohol |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | I. | II. | $\sigma_{18,5^\circ} = 0,7953$ |
| | $t = 18,0^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 18,1^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 1$ |
| + 1,000 | 267,8 _s * | — | — |
| + 0,600 | 247,6 _s | — | 268,4 |
| + 0,300 | 251,7 _s | — | 267,3 _s |
| + 0,100 | 260,0 | — | — |
| 0 | 271,9 | 272,8 | 268,6 _s |
| - 0,100 | 277,2 | 277,6 | 268,6 _s |
| - 0,300 | 283,3 | 283,3 _s | 270,0 |
| - 0,600 | 287,5 | 287,7 _s | 269,2 |
| - 1,000 | 289,1 _s | 289,1 | 269,6 |
| - 1,500 | 290,3 _s | — | — |
| - 2,000 | 290,6 | 290,4 | 270,0 _s |
| - 3,000 | 288,2 | 288,4 | 269,8 _s |
| - 4,000 | unregelmäßig | 271,4**) | — |
| - 5,000 | — | — | 265,75 |
| - 6,00 | — | — | 260,55 |
| - 8,00 | — | — | 257,1 |
| - 10,00 | — | — | 252,8 |

**) Unregelmäßig; andere Werte 267,9 und 270,45.

schätze ich auf 0,01 Volt und 0,1 meiner Oberflächenspannungseinheit. Um nun aber diese letztere auf die gebräuchliche 1 mg/mm zu reduzieren, schlug ich folgenden Weg ein: Die Kurzschluß- und die maximalen Oberflächenspannungen von verschiedenen konzentrierten H_2SO_4 -Lösungen, die Paschen¹⁾ nach der Steighöhenmethode gemessen hatte, trug ich als Funktionen der Konzentration in Kurven auf und entnahm diesen die für meine Konzentrationen gültigen Werte. Es wurden nur mittlere Konzentrationen benutzt und die Dichten der Lösungen auf die gleiche Temperatur bezogen.²⁾

Auf diese Weise bekam ich für den reziproken Um-

1) F. Paschen, Wied. Ann. 40. p. 86. 1890.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik p. 574. 1901.

Tabelle 16.

| Polarisierende E.M.K. | | I. | II. |
|-----------------------|---------|--------|--------|
| in Dan. | in Volt | | |
| -0,002 | -0,0054 | 1,2 | 196,0 |
| -0,01 | -0,011 | 2,3 | 196,9 |
| -0,05 | -0,054 | 12,38 | 205,23 |
| -0,1 | -0,107 | 24,18 | 214,95 |
| -0,2 | -0,215 | 43,49 | 231,0 |
| -0,3 | -0,322 | 58,92 | 248,75 |
| -0,4 | -0,43 | 71,65 | 254,85 |
| -0,5 | -0,54 | 81,37 | 262,3 |
| -0,6 | -0,645 | 90,00 | 269,5 |
| -0,7 | -0,751 | 54,76 | 273,5 |
| -0,8 | -0,858 | 98,90 | 276,9 |
| -0,9 | -0,966 | 99,59 | 277,5 |
| -1,0 | -1,074 | 98,80* | 276,0* |
| -1,15 | -1,235 | 95,55* | 274,1* |
| -1,261 | -1,355 | 93,80* | 272,2* |
| -1,30 | -1,398 | 91,67* | 270,9* |

wandlungsfaktor von meinen Einheiten auf mg/mm die im folgenden zusammengestellten Werte.

| Δ | | |
|--------------------------------|--|--------------|
| $\frac{209,15}{31,83} = 6,571$ | | + 0,053 |
| $\frac{209,1}{31,79} = 6,578$ | | + 0,060 |
| $\frac{204,3}{31,60} = 6,462$ | | - 0,056 |
| $\frac{200,4}{30,89} = 6,594$ | | + 0,076 |
| $\frac{275,1}{42,07} = 6,539$ | | + 0,021 |
| $\frac{275,8}{42,93} = 6,424$ | | - 0,094 |
| $\frac{277,6}{43,01} = 6,454$ | | - 0,064 |
| Mittel 6,5175 | | $\pm 0,0278$ |

Die Abweichungen Δ vom Mittelwert übersteigen nur in zwei Fällen 1 Proz. des Wertes; eine bessere Übereinstimmung konnte überhaupt nicht erwartet werden, da wie Paschen schreibt, seine Einzelbeobachtungen um etwa 1 Proz. voneinander abwichen. Durch Division mit dem Faktor 6,518 werden also unsere Bestimmungen der maximalen Oberflächenspannung auf die Einheit mg/mm übergeführt. Da es sich dabei um Zahlen handelt, die untereinander um höchstens 8 Proz. variieren, wird durch die Unsicherheit im Umwandlungsfaktor ihr absoluter Wert um ca. $\frac{1}{2}$ Proz. falsch sein können, aber die *Veränderungen* werden dadurch nicht im merklichen Maße berührt.

Die Oberflächenspannungen der benutzten Lösungen wurden unter Zugrundelegung der Volkmannschen Zahl für Wasser¹⁾ aus den Beobachtungen von Röntgen und Schneider²⁾ berechnet; einige mit einem Sternchen bezeichnete Werte mußten durch Extrapolation gewonnen werden. Auf die Beobachtungstemperatur, die übrigens von 18° nicht viel abwich, wurden sie mit Hilfe des für reines Wasser (Volkmann, l. c.) geltenden Temperaturkoeffizienten reduziert. In dieser Weise bekam ich schließlich die in der Tab. 17 zusammengestellten Zahlen.

Unter α_1 ist die Oberflächenspannung des Elektrolyten bei der Versuchstemperatur, unter α_{12} die maximale Oberflächenspannung Quecksilber-Elektrolyt angeführt, die sich in der Form

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2 A_{12}$$

darstellen läßt. Wie ich schon in der Einleitung hervorgehoben habe, ist bei der Ableitung obiger Formel keine Rücksicht genommen auf die Helmholtzsche elektrische Doppelschicht, welche die Oberflächenspannung stark verkleinert. Unser α_{12} ist nun so beschaffen, daß keine Doppelschicht existiert, und nur in diesem Falle tritt der Einfluß von A_{12} rein zu Tage. In der vorletzten Kolumne der Tab. 17 sind die Differenzen

$$\alpha_{12} - \alpha_1 = \alpha_2 - 2 A_{12}$$

1) P. Volkmann, Wied. Ann. 56. p. 457. 1895.

2) W. C. Röntgen u. J. Schneider, Wied. Ann. 29. p. 165. 1886.
Die Oberflächenspannung von Äthylalkohol nach J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. 31. p. 177. 1885.

berechnet; α_2 , die Oberflächenspannung des Quecksilbers, wollen wir nicht in die Rechnung einführen, da die experimentellen Bestimmungen dieser Größe zwischen 40 und 56 mg/mm schwanken.¹⁾ Jedenfalls ist unser $a_{12} - \alpha_1$ immer kleiner als α_2 , und A_{12} daher positiv. Vergleicht man die Werte von A_{12} für Wasser/Quecksilber mit denen für wässrige Lösung/Quecksilber, so wird man a priori erwarten, daß A_{12} im zweiten Falle größer wird, da die eine anziehende Masse dichter geworden ist. In der Fig. 7 habe ich die durch die Lösung

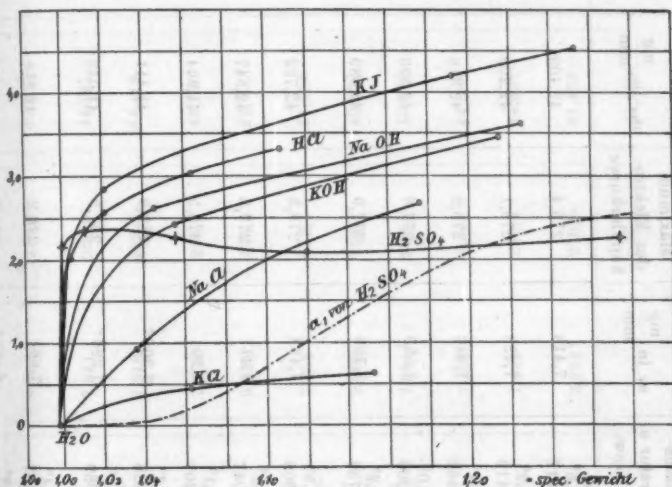


Fig. 7.

bewirkte Veränderung des Wertes $\alpha_2 - 2A_{12}$ für Wasser als Funktion der spezifischen Gewichte dargestellt. Diese geben die in der letzten Kolonne der Tab. 18 angeführten Werte

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Wasser}} - (\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Lösung}} \\
 & = 2(A_{12\text{Lösung}} - A_{12\text{Wasser}}) \text{ in mg/mm.}
 \end{aligned}$$

Die Figur zeigt, daß eine vollständig gesetzmäßige Beziehung zwischen A_{12} und der Dichte der Lösungen besteht.

1) Vgl. G. Quincke, Wied. Ann. 61. p. 267. 1897.

Tabelle 17.

| Elektrolyt | Spezifisches Gewicht bei der Temperatur | Versuchs-temperatur u. spez. Gew. | α_1 in $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | Maximum der Elektro-kapillarkurve | α_{12} in $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | $\alpha_{12} - \alpha_1$ | $(\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Wasser}} - (\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Lösung}}$ |
|-------------------------|---|-----------------------------------|---|-----------------------------------|--|--------------------------|---|
| H_2SO_4 | 1,0000 23,0° | 18,6° 1,0012 | 7,416 | 276,4 | 42,409 | 34,993 | 2,141 |
| | 1,0113 20,1° | 18,2° 1,0119 | 7,423 | 275,1 | 42,209 | 34,786 | 2,348 |
| | 1,0559 19,5° | 18,1° 1,0563 | 7,446 | 275,8 | 42,316 | 34,870 | 2,264 |
| | 1,1194 20,2° | 18,0° 1,1200 | 7,553 | 277,6 | 42,593 | 35,040 | 2,094 |
| | 1,2733 20,8° | 18,2° 1,2739 | 7,766 | 277,9 | 42,639 | 34,873 | 2,261 |
| | 1,0006 19,0° | 17,9° 1,0009 | 7,422 | 278,5 | 42,732 | 35,310 | 1,824 |
| | 1,0039 20,5° | 17,8° 1,0047 | 7,417 | 277,3 | 42,547 | 35,130 | 2,004 |
| | 1,0300 20,5° | 18,1° 1,0207 | 7,391 | 278,5 | 41,964 | 34,573 | 2,561 |
| HCl | 1,0683 19,3° | 18,2° 1,0638 | 7,309* | 269,9 | 41,411 | 34,102* | 3,032 |
| | 1,1067 19,0° | 18,3° 1,1089 | 7,226* | 267,5 | 41,043 | 33,817* | 3,317 |
| KOH | 1,0554 19,3° | 18,4° 1,0557 | 7,664 | 276,2 | 42,378 | 34,714 | 2,420 |
| | 1,2146 20,3° | 18,9° 1,2150 | 8,427* | 274,3 | 42,087 | 33,660* | 3,474 |
| | 1,0460 19,8° | 18,1° 1,0465 | 7,637 | 274,6* | 42,138 | 34,496 | 2,338 |

Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber. 709

| KOH | 1,2146 20,5° | 18,9° 1,2130 | 8,427* | 274,8 | 42,087 | 33,680* | 3,474 |
|-------------------|-----------------|-----------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| NaOH | 1,0460 19,8° | 18,1° 1,0465 | 7,637 | 274,6 | 42,133 | 34,496 | 2,638 |
| | 1,2254 20,0° | 18,0° 1,2260 | 8,708* | 275,2 | 42,225 | 33,517* | 3,617 |
| | 1,0680 17,0° | 17,0° 1,0630 | 7,641 | 288,9 | 44,327 | 36,686 | 0,448 |
| KCl | 1,1518 16,8° | 16,4° 1,1519 | 7,918 | 289,5 | 44,419 | 36,501 | 0,633 |
| | 1,0370 20,0° | 18,2° 1,0378 | 7,577 | 285,4 | 43,790 | 36,213 | 0,921 |
| | 1,1756 19,1° | 18,6° 1,1757 | 8,249 | 278,3 | 42,700 | 34,451 | 2,683 |
| NaCl | 1,0200 19,0° | 17,3° 1,0206 | 7,454 | 272,1 | 41,750 | 34,296 | 2,838 |
| | 1,1914 18,8° | 17,2° 1,1920 | 7,602 | 264,1 | 40,522 | 32,920 | 4,214 |
| | 1,2514 19,2° | 17,0° 1,2521 | 7,664* | 262,5 | 40,276 | 32,612 | 4,522 |
| KJ | 1,0000 4° | 16,0° 0,9990 | 7,454 | 290,6 | 44,588 | 37,134 | — |
| | 1,0000 4° | 18,1° 0,9986 | 7,424 | 290,4 | 44,557 | 37,134 | — |
| | 0,7953 18,0° | 18,5° 0,7953 | 2,283* | 270,0s | 41,435 | 39,147 | — 2,018 |
| Wasser | 1,0098 20,0° | — | — | 268,5 | 41,350 | — | — |
| | 1,0833 20,6° | — | — | 268,2 | 41,151 | — | — |
| | — | — | — | — | — | — | — |
| Athyl- alkohol | — | — | — | — | — | — | — |
| | — | — | — | — | — | — | — |
| | — | — | — | — | — | — | — |
| KCN | — | — | — | — | — | — | — |
| | — | — | — | — | — | — | — |
| | — | — | — | — | — | — | — |

Daß sie nicht nur durch das Verhalten der Oberflächenspannungen α_1 bei verschiedenen Konzentrationen bedingt ist, beweist der sehr ähnliche Verlauf der Kurven für die HCl- und KJ-Lösungen, denn α_1 nimmt mit wachsender Konzentration bei HCl ab, bei KJ aber zu. Mit Ausnahme der H_2SO_4 -Lösungen läßt sich folgender Satz aufstellen: *Die Größe A_{12} , welche das Maß für die Adhäsion an der Grenze zwischen Quecksilber und Wasser bildet, wird durch das Auflösen von Salzen im Wasser erhöht und zwar wächst sie mit zunehmender Dichte der Lösung zuerst schneller dann langsamer.*

Nur H_2SO_4 zeigt ein abweichendes Verhalten: A_{12} wächst zuerst sehr schnell, beginnt aber schon bei der Dichte 1,01 zu fallen, erreicht ungefähr bei 1,16 ein Minimum, und steigt dann wieder langsam im weiteren Verlauf. Die Ursachen dieses anomalen Verhaltens sind vielleicht in Veränderungen der Molekularstruktur zu suchen. Die Schwefelsäure zeigt ja bekanntlich auch verschiedene Anomalien in der Beziehung zwischen Dichte und Konzentration (Mendelejeff), Kompressibilität, Oberflächenspannung und Konzentration (Röntgen und Schneider). Die Oberflächenspannung als Funktion der Konzentration ist in der Figur durch die strichpunktierte Kurve in einem willkürlichen Maßstab dargestellt. Diese Kurve und diejenige für A_{12} zeichnen sich durch einen Wendepunkt aus, der ungefähr bei derselben Konzentration liegt. Dagegen fallen die Maxima der beiden Kurven nicht zusammen.

Es scheint, daß zwischen dem Molekulargewicht der gelösten Substanzen und den von ihnen bewirkten Adhäsionserhöhungen eine gesetzmäßige Beziehung besteht, da diese bei ähnlichen Verbindungen wie HCl, NaCl und KCl, oder NaOH und KOH eine umgekehrte Reihenfolge ihrer Größen zeigen, wie die Molekulargewichte. Doch scheint es, daß vom Molekulargewicht nur die Größe der Adhäsionserhöhung abhängt, daß aber ihr Gang im wesentlichen von der Dichte der Lösung bedingt wird und bei allen Substanzen gleich oder wenigstens sehr ähnlich ist. Stellen wir nämlich die Beziehung zwischen Adhäsionserhöhung und Molekulargehalt der Lösungen graphisch dar, so zeigt das Diagramm nicht so einfache Verhältnisse, wie das beigelegte, und die Kurven für KOH und NaOH werden von derjenigen für HCl geschnitten. Die Adhäsion

zwischen Quecksilber/Alkohol fand ich kleiner, als diejenige zwischen Quecksilber/Wasser, übereinstimmend mit Quincke¹⁾, der diese beiden Größen allerdings *ohne Rücksicht auf die elektrische Doppelschicht* als erster gemessen hat. Dem erwähnten Umstande ist vielleicht beizurechnen, daß seine Messung der Adhäsion unterschwefligsaures Natron/Quecksilber kleiner als die von Wasser/Quecksilber ausfiel.

Nun wollen wir uns der Frage zuwenden, inwiefern die nach der Tropfenwägungsmethode ermittelten Elektrokapillarkurven sich zur Bestimmung der zur maximalen Oberflächenspannung zugehörigen elektromotorischen Kraft eignen. Ich habe bereits den Einwand angeführt, welcher in dieser Beziehung der angewandten Methode gemacht werden könnte, daß nämlich die beim Tropfen entstehende Gegenpotentialdifferenz die von außen angelegte elektromotorische Kraft verkleinern könnte, wodurch die Maxima nach den höheren Polarisationen hin verschoben erscheinen würden. Diese Frage kann auf Grund der folgenden Tab. 18 entschieden werden.

Unter I. sind die Ergebnisse der Messungen von Paschen²⁾ mit dem U-Rohr, unter II. die, welche derselbe Forscher mit Tropfelektroden gewonnen hat³⁾, und unter III. meine eigenen Resultate zusammengestellt, und zwar gibt die erste Kolumne das (auf 18° bezogene) spezifische Gewicht der Lösung, und die zweite die elektromotorische Kraft des Maximums bez der Tropfelektrode in Volt an. Alle Polarisationen sind kathodisch; Paschensche Daniells sind nach seiner Angabe gleich 1,074 Volt angenommen. Die Übereinstimmung unserer Resultate mit den mittels der Tropfelektroden gewonnenen ist in Anbetracht der Unsicherheit der graphischen Methode zur Ermittlung des Maximums und der experimentellen Schwierigkeiten bei der Tropfelektrode als eine sehr gute zu bezeichnen; diese Werte stimmen hie und da sogar besser überein, als die beiden Paschenschen Bestimmungen untereinander. Die Schätzung der Genauigkeit bei meinen Messungen auf $\pm 0,01$ Volt ist daher sicher nicht übertrieben. Von einer Verschiebung des Maximums nach den höheren elektromotorischen Kräften hin ist bei H_2SO_4 und

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 1. 1870.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 40. p. 36. 1890.

3) F. Paschen, Wied. Ann. 41. p. 42. 1890.

Tabelle 18.

| I. | | II. | | III. | |
|------------|-----------------|------------|--------|------------|--------|
| Spez. Gew. | E.M.K. | Spez. Gew. | E.M.K. | Spez. Gew. | E.M.K. |
| H_2SO_4 | | | | | |
| 1,000 | 0,859 | — | — | — | — |
| 1,001 | 0,895 | — | — | 1,001 | 0,807 |
| — | — | 1,006 | 0,748 | — | — |
| — | — | — | — | 1,012 | 0,800 |
| — | — | — | — | 1,056 | 0,840 |
| 1,066 | 0,851 | — | — | — | — |
| — | — | 1,105 | 0,850 | — | — |
| — | — | — | — | 1,120 | 0,860 |
| — | — | 1,123 | 0,876 | — | — |
| 1,163 | 0,888 | 1,169 | 0,922 | — | — |
| 1,189 | 0,935 | — | — | — | — |
| — | — | 1,191 | 0,996 | — | — |
| 1,207 | 0,958 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | 1,274 | 1,02 |
| — | — | 1,299 | 1,021 | — | — |
| 1,394 | 1,030 | — | — | — | — |
| HCl | | | | | |
| 1,001 | 0,494 | — | — | 1,001 | 0,569 |
| — | — | — | — | 1,004 | 0,548 |
| — | — | 1,010 | 0,550 | — | — |
| 1,015 | 0,591 | 1,015 | 0,553 | — | — |
| — | — | — | — | 1,021 | 0,558 |
| — | — | 1,037 | 0,5583 | — | — |
| — | — | — | — | 1,064 | 0,596 |
| 1,080 | 0,602 | — | — | — | — |
| — | — | 1,082 | 0,589 | — | — |
| 1,091 | 0,612 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | 1,107 | 0,627 |
| 1,111 | 0,634 | — | — | — | — |
| — | — | 1,121 | 0,622 | — | — |
| KOH | | | | | |
| — | — | 1,038 | 0,265 | — | — |
| 1,044 | 0,376 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | 1,055 | 0,290 |
| — | — | — | — | 1,214 | 0,207 |
| 1 857 | $0,11 \pm 0,05$ | — | — | — | — |
| — | — | 1,477 | 0,011 | — | — |

HCl nicht das geringste Anzeichen vorhanden; die KOH-Lösung II hat nach Paschens Angabe $\frac{1}{2}$ Jahr im Glasgefäß gestanden, sodaß die Abweichung zwischen II. und III. nicht ins Gewicht fallen kann. Der plötzliche Anstieg der elektromotorischen Gegenkraft beim Tropfen von Quecksilber entsteht also in dem Momente, wo der Tropfen eben schon abgerissen ist und die zurückbleibende Quecksilbermasse auf einen Augenblick eine frische Oberfläche besitzt. Dadurch werden die Schlüsse von Bernstein¹⁾ vollständig bestätigt, der auf dieselbe bewegte photographische Platte zugleich einen abfallenden Tropfen einer langsam tropfenden Elektrode, und den Quecksilbermeniskus eines Kapillarelektrometers, welches mit dieser verbunden war, aufnahm.

Im folgenden gebe ich eine Zusammenstellung meiner sonstigen Bestimmungen der elektromotorischen Kraft des Maximums.

| | | | |
|------------------|---|---------------------------------|--------------------|
| NaOH | { | vom spez. Gew. 1,0460 bei 19,8° | -0,29 Volt |
| | | " " " 1,2254 " 20,0 | -0,215 |
| KCl | { | " " " 1,0630 " 17,0 | -0,573 |
| | | " " " 1,1518 " 16,8 | -0,565 |
| NaCl | { | " " " 1,0370 " 20,0 | -0,615 |
| | | " " " 1,1756 " 19,1 | -0,553 |
| KJ | { | " " " 1,0200 " 19,0 | -0,370 |
| | | " " " 1,1914 " 18,8 | -0,385 |
| | | " " " 1,2514 " 19,2 | -0,410 |
| HNO ₃ | " | " " " 1,0003 " 17,0 | -0,322 |
| KCN | { | " " " 1,0098 " 20,0 | $\approx +0,06$ |
| | | " " " 1,0833 " 20,6 | +0,068 |
| H ₂ O | " | " " " 0,9986 " 18,0 | -2,0 ²⁾ |

Die Genauigkeit ist etwa $\pm 0,01$ Volt.

Diese Werte und diejenigen der Kurzschluß- und Maximaloberflächenspannungen wollen wir dazu benutzen um eine Vermutung, die in der Theorie des Kapillarelektrometers öfters auftrat, zu prüfen. Schon Lippmann³⁾ hat den weitgehenden Satz zu beweisen gesucht, daß die Beziehung zwischen der Ober-

1) J. Bernstein, l. c. p. 202.

2) Vgl. im nächsten Abschnitt: Autodepolarisation.

3) G. Lippmann, Ann. de Chim et de Phys. (5) 12, p. 265. 1877.

flächenspannung α einer Quecksilberelektrode und der entsprechenden Potentialdifferenz V unabhängig von der Natur des verwendeten Elektrolyten sei. Später sprach Wiedeburg¹⁾, der eine Modifikation der Helmholtz-Lippmannschen Theorie aufgestellt hat, sogar die Vermutung aus, daß es nicht ausgeschlossen sei, daß eine gewisse, in seiner Theorie auftretende Konstante vielleicht berufen wäre, bei der Polarisation „für die Vorgänge an den Elektroden dieselbe Rolle einer *universellen Konstanten* zu spielen, wie die ‚Ladung eines einwertigen Ions‘ $s = 9654 \text{ Coul./g.-Äq.}$ für die Vorgänge im Innern des Elektrolyten“.

Diese Konstante $1/c$ spielt die Rolle der halben Kapazität der Flächeneinheit einer polarisierten Elektrode und ist durch die Beziehung

$$\alpha_0 = \alpha_m - \frac{1}{c} \cdot V_m^2$$

gegeben, wobei α_0 und α_m die Kurzschluß- und Maximaloberflächenspannung, und V_m die zu dieser zweiten gehörige elektromotorische Kraft bedeuten.

Ich habe nun aus meinen Versuchen $1/c$ berechnet und zwar ergeben sich in den von mir benutzten willkürlichen Einheiten der Oberflächenspannung die Werte

| | | | | | | | |
|-------------------------|---|---------------|--|--------------|--|----------------|--|
| H_2SO_4 | $\left\{ \begin{array}{l} 103,1 \\ 103,1 \\ 101,8 \\ 105,0 \\ 88,4 \end{array} \right.$ | HCl | $\left\{ \begin{array}{l} 116 \\ 137,5 \\ 139,2 \\ 128,5 \\ 117,1 \end{array} \right.$ | KOH | $\left\{ \begin{array}{l} 101 \\ 168 \end{array} \right.$ | NaOH | $\left\{ \begin{array}{l} 80 \\ 132 \end{array} \right.$ |
| Mittel | 100,3 | | 128 | | | | |
| KCl | $\left\{ \begin{array}{l} 160 \\ 167 \end{array} \right.$ | NaCl | $\left\{ \begin{array}{l} 126 \\ 162 \end{array} \right.$ | KJ | $\left\{ \begin{array}{l} 464 \\ 328 \\ 270 \end{array} \right.$ | KCN | 456 |
| | | | | | | HNO_3 | 97,3 |

Wenn auch die Zahlen, welche bei KOH, NaOH und KCN berechnet wurden, keine große Genauigkeit beanspruchen können, da die Differenz $\alpha_m - \alpha_0$ klein ist, so scheinen mir

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. 54. p. 64. 1895.

hauptsächlich die gut bestimmten Werte bei H_2SO_4 , HCl und KJ zu beweisen, daß $1/c$ weder für alle Elektrolyten, noch für verschiedene Konzentrationen desselben Elektrolyten eine Konstante wäre. Denn, wenn man auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft im Falle der verdünnten KJ einen Fehler von 0,03 Volt und bei der Berechnung von $\alpha_m - \alpha_0$ einen solchen von 1,0 w. E. (welche beide ausgeschlossen sind) zulassen würde, ginge der Wert für $1/c$ von 464 erst auf 392 herunter.

In denselben Einheiten, wie sie Wiedeburg benutzt, ist der mittlere Wert von $1/c$ bei H_2SO_4 gleich $100,3/6,52 = 15,4$; dieser stimmt mit dem von Wiedeburg angegebenen 14 Mikrof./ cm^2 ziemlich überein.

Nach dem Bilde, welches uns die Helmholtz-Wiedeburgsche Theorie von den Vorgängen im Kapillarelektrometer entwirft, müßten wir unser Ergebnis in folgender Weise deuten: Wenn auch der Abstand der beiden die Doppelschicht bildenden elektrischen Belegungen bei verschiedenen Konzentrationen einer und derselben Säure keine großen Größenschwankungen zeigen würde, so ist er doch nicht für alle Elektrolyte derselbe, und hängt auch, wenigstens bei einigen Salzen, stark von der Konzentration ab.

An dieser Stelle möchte ich auf die in der Tab. 16 angeführten Resultate der Messungen an Wasser und Alkohol hinweisen. Die beiden ersten Messungen beziehen sich auf frisch eingefülltes, und auf 16 Stunden über Hg abgestandenes Wasser. Ihre Übereinstimmung läßt nichts zu wünschen übrig; die Kurve für Alkohol ist allerdings nicht so glatt, wie diejenige für Wasser. Es sind dies aber die ersten Bestimmungen der *Elektrokapillarkurven* bei sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten. Paschen gelang es nur mit Hilfe seines U-Rohres „mit der elektromotorischen Kraft wachsende, wenn auch sehr langsam erfolgende Ausschläge“ und ihre „Wiederabnahme, welche allerdings erst bei -2 Dan. begann“, nachzuweisen.

VI. *Der aufsteigende Ast. Die Autodepolarisation.* 1. Schon frühere Beobachter wie Paschen und Smith bemerkten, daß bei der Bestimmung des aufsteigenden Astes der Elektrokapillarkurve von Salzen gewisse sonderbare Abweichungen von dem normalen Verhalten, wie z. B. bei der

Schwefelsäure, auftreten. So nennt Paschen in seiner ersten Abhandlung die Art der Einstellung des Kapillarelektrometers bei konzentriertem Na_2SO_4 „langsamer und veränderlich“. Smith¹⁾, der die Kurven für sehr verdünnte KCl , KJ , NaCl u. a. Lösungen bestimmt hat, schreibt: „Das Verhalten des Meniskus im Kapillarelektrometer ist im allgemeinen im „ansteigenden“ Teile sehr verschieden von demjenigen im absteigenden Gebiete. Im ansteigenden Ast ist das Quecksilber häufig träge und die Oberflächenspannung ist schwierig zu messen. Weiterhin kann die Oberflächenspannung einen gewissen Betrag annehmen, unmittelbar nachdem eine gegebene Potentialdifferenz zwischen die Pole des Elektrometers geschaltet ist und darauf allmählich nach Maßgabe der Berührungsdauer abfallen.“²⁾ Im Gegensatz hierzu ist die Oberflächenspannung im absteigenden Ast der Kurve fast immer sehr bestimmt. Während außerdem die Gestalt des ansteigenden Teiles für Lösungen mit verschiedenen Anionen weitgehend veränderlich ist, und sogar merkliche Unterschiede zeigt für ungleich konzentrierte Lösungen desselben Salzes, ist die Gestalt des absteigenden Teiles während eines beträchtlichen Teiles des Verlaufes (innerhalb der Beobachtungsfehler) für gleich konzentrierte Lösungen von ganz verschiedenen Salzen gleich, und zeigt nur sehr geringe Unterschiede für ungleich konzentrierte Lösungen eines gegebenen Salzes.“

Meine Messungen bestätigen das über den „absteigenden“ Ast Gesagte in vollem Umfange, wie ein Blick auf die beigegebenen Tafeln lehrt. Den Grund für das Verhalten des Kapillarelektrometers im „aufsteigenden“ Aste glaube ich in den Versuchen gefunden zu haben, die ich im folgenden beschreiben will. Zuerst sollen die Resultate der Messungen an K_2SO_4 und Na_2SO_4 tabellarisch zusammengestellt werden (vgl. Tab. 19 u. 20).

Aus der graphischen Darstellung dieser Messungen auf der beigegebenen Tafel III erkennt man sofort das sehr abweichende Verhalten des K_2SO_4 und Na_2SO_4 gegenüber allen im vorigen Abschnitte untersuchten Elektrolyten.

1) S. W. J. Smith, l. c. p. 451.

2) Von mir hervorgehoben.

Tabelle 19.

 K_2SO_4

| Polarisier. E.M.K. in Volt | I. | II. | III. | IV. | V. |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | $\sigma_{18,6^\circ} = 1,0067$ | $\sigma_{21^\circ} = 1,0668$ | $\sigma_{20^\circ} = 1,040$ | $\sigma_{19,5^\circ} = 1,046$ | $\sigma_{20,5^\circ} = 1,0682$ |
| | $t = 16,8^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 18,0^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 19,6^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 20,1^\circ \pm 0,3^\circ$ |
| 0,0 | 248,5 | 245,6 | 263,1 _s | 267,3 | 218,0 |
| 0,100 | 262,9 | 261,7 | 252,3 _s | 273,0 | 235,4 _s |
| 0,200 | 274,3 | 274,8 _s | — | 275,7 _s | 249,4 _s |
| 0,300 | 282,7 | 284,2 | 279,7 | 276,7 _s | 261,4 |
| 0,400 | 283,1 _s | 285,9 | 287,2 | 276,1 _s | 269,2 _s |
| 0,450 | — | — | — | — | 272,3 _s |
| 0,500 | 279,0 | 276,1 | 276,2 | 274,1 _s | 274,9 |
| 0,600 | 278,9 | 277,9 _s | 277,0 | 271,3 _s | 277,8 |
| 0,700 | 277,9 | 279,6 | 277,4 | 266,9 | 277,6 |
| 0,800 | 277,4 | 280,0 _s | 277,0 _s | 261,1 | 276,4 |
| 0,900 | 274,8 _s | 279,2 _s | 275,8 | 253,8 | 273,4 _s |
| 1,000 | 270,8 | 276,1 | 273,2 _s | 243,5 _s | 270,5 _s |
| 1,100 | 267,2 _s | 271,3 | 270,9 | 234,1 _s | 265,7 |
| 1,200 | 262,2 | 263,6 | 266,0 _s | 223,2 | 259,5 _s |
| 1,300 | 254,3 | 254,3 _s | 259,3 | — | 251,8 _s |
| 1,400 | 246,4 | 242,3 | 249,6 _s | 197,6 | 243,6 |
| 1,500 | 235,1 _s | 230,1 _s | — | — | — |
| 1,600 | 224,8 | 217,3 | 224,9 | 167,6 _s | 223,0 |
| 1,700 | 213,1 | 204,2 | — | — | — |
| 1,800 | 200,0 | 190,0 | 199,3 _s | 136,3 | 195,9 |
| 1,900 | — | 174,6 _s | — | — | — |
| 2,000 | 170,0 | 158,2 _s | 168,9 _s | — | 163,4 |

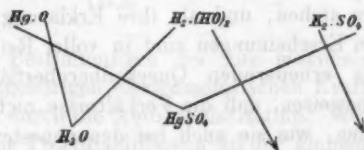
Die Messungsreihen I. und II. der beiden Tabellen sind an „alten“ Lösungen gemacht, die etwa 20 Tage über Quecksilber standen, die Messungen III. an solchen, die frisch bereitet wurden. Das Verhalten aller Lösungen ist sehr ähnlich: sie zeigen insgesamt *zwei* Maxima, wobei das erste bis auf die konzentrierte „alte“ Lösung von Na_2SO_4 sehr stark ausgeprägt ist, und das zweite, weniger hervortretende, mit demjenigen übereinstimmt, welches mittels „statischer“ Methoden für beide Salze gefunden worden war. Das erste liegt also im aufsteigenden Aste der bisher immer bestimmten Elektrokapillarkurven. Es muß demnach von einer sekundären Reaktion

Tabelle 20.

 Na_2SO_4 .

| Polarisier. E.M.K. in Volt | I. | II. | III. |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | $\sigma_{19,3^\circ} = 1,0094$ | $\sigma_{20,6^\circ} = 1,0950$ | $\sigma_{19,5^\circ} = 1,0076$ |
| | $t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 18,1^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 17,1^\circ \pm 0,1^\circ$ |
| 0,0 | 249,1 | 248,6 | 247,7 _s |
| 0,100 | 263,6 | 261,5 | 263,1 |
| 0,200 | 275,8 | 270,8 _s | 275,4 _s |
| 0,250 | — | — | 281,3 |
| 0,300 | 284,9 _s | 269,1 _s | 285,3 |
| 0,340 | — | — | 287,5 |
| 0,370 | — | — | 288,9 _s |
| 0,400 | 291,3 | 274,0 | 290,1 |
| 0,420 | — | — | 290,6 _s |
| 0,440 | — | — | 276,7 _s |
| 0,460 | — | — | 276,3 |
| 0,480 | — | — | 276,0 |
| 0,500 | 278,6 | 277,5 | 276,5 _s |
| 0,530 | — | — | 277,5 |
| 0,560 | — | — | 278,5 _s |
| 0,600 | 282,1 | 278,4 | 279,7 _s |
| 0,650 | — | — | 280,5 _s |
| 0,700 | 281,1 _s | 277,5 _s | 280,4 _s |
| 0,750 | — | — | 280,1 |
| 0,800 | 279,3 _s | 276,4 _s | 279,2 |
| 0,850 | — | — | 278,1 |
| 0,900 | 275,9 | 273,4 | 276,9 _s |
| 0,950 | — | — | 275,1 |
| 1,000 | 270,6 _s | 268,9 | 273,4 |
| 1,100 | — | 262,2 | — |
| 1,200 | 259,2 | 254,6 | — |
| 1,300 | 252,5 | 246,0 | — |
| 1,400 | 244,0 | 235,6 _s | — |
| 1,500 | 234,6 _s | 224,3 | — |
| 1,600 | 223,7 | 211,9 | — |
| 1,800 | 199,9 | 184,7 | — |
| 2,000 | 170,7 | 154,0 _s | — |

herrühren, welche momentan stattfindet, aber keine beständigen Produkte, zwischen denen Gleichgewicht bestünde, liefert. Das naheliegendste Produkt bei den drei Konstituenten Hg , H_2O und K_2SO_4 (bez. Na_2SO_4) wäre KOH (bez. NaOH), deren Maximum bei einer großen Verdünnung auch ungefähr bei 0,3 oder 0,4 Volt liegen muß. Es wurde daher in 150 cm^3 der etwa 5 proz. Lösung von K_2SO_4 ca. 1 g KOH aufgelöst, sodaß sie jetzt außerdem in Bezug auf KOH etwa 0,7 proz. war. Die Elektrokapillarkurve nahm nun die Gestalt IV. an, welche zeigt, daß der Einfluß des K_2SO_4 gegenüber KOH fast vollständig verschwindet, was die aus früheren Messungen entnommene, auf der Tafel mitgezeichnete Kurve VI beweist. Eine weitere Überlegung ergibt, daß, wenn das erste „sekundäre“ Maximum von KOH herrührt, es verschwinden müßte, wenn die K_2SO_4 -Lösung Spuren freier Säure enthielte. Um dies zu untersuchen, wurde die Kurve V einer ziemlich gesättigten frischen Lösung von K_2SO_4 aufgenommen, zu der 2 Proz. einer 0,2 proz. H_2SO_4 -Lösung beigefügt wurden, sodaß sie in Bezug auf H_2SO_4 etwa 0,004 proz. war. Sie zeigt kein sekundäres Maximum, sondern verläuft vollständig normal; ihr bei etwa 0,64 Volt liegendes Maximum wird nach den bisher mitgeteilten Angaben kaum von der verschwindend geringen Menge freier H_2SO_4 beeinflusst, sondern der Hauptsache nach von K_2SO_4 bestimmt werden. Mit Bezug auf die von Warburg¹⁾ und Nernst zur Erklärung der elektrokapillaren Erscheinungen herangezogene Bildung eines Quecksilbersalzes mit Hülfe des in der Lösung vorhandenen Sauerstoffs könnte man vielleicht an die folgende Reaktion denken:



1) E. Warburg, Wied. Ann. 38. p. 321. 1889; 41. p. 1. 1890; G. Meyer, Wied. Ann. 45. p. 508. 1892; 53. p. 845. 1894; 56. p. 680. 1895; U. Behn, Wied. Ann. 61. p. 748. 1897.

wobei, wenn man nach einer „statischen“ Methode die Kurve bestimmt, das Hg-Salz wieder reduziert würde. Allerdings möchte ich dies nur als eine, bisher nicht anders als durch die bereits angeführten Versuche, gestützte vorläufige Vermutung hinstellen. Diese oder eine andere ähnliche Reaktion müßte in außerordentlich kleinen Mengen vor sich gehen. Ein Versuch, das freie Hydroxylion mittels Phenolphthalein nachzuweisen, führte zu einem negativen Resultate. Auch vermag ich vorläufig keinen plausiblen Grund anzugeben, warum die Änderung der Kurve fast sprunghaft erfolgt (vgl. Na_2SO_4 , III. Tafel III).

Ginge die Reaktion nach einem dem obigen ähnlichen Schema vor sich, müßte man etwas Analoges auch bei den KCl- und NaCl-Lösungen erwarten. Dies tritt auch tatsächlich bei verdünnteren Lösungen ein.

In der folgenden Tab. 21 sind die Resultate der Untersuchung einer „alten“ KCl-(I) und je einer frischen verdünnten KCl-(II) und NaCl-Lösung zusammengestellt.

Die auftretenden Anomalien sind zu analog den früher beschriebenen, als daß sie Zufälligkeiten entspringen könnten. Das Verhalten der „alten“ Lösung scheint darauf hinzuweisen, daß sie von der Konzentration des gelösten Quecksilbersalzes abhängen, also eines ähnlichen Ursprunges sind, wie die bei den beiden Sulfaten beschriebenen. Bei 0,7 bez. 0,8 Volt scheint auch eine Anomalie aufzutreten.

Bei allen diesen Versuchen ist der Gang des absteigenden Astes der Kurve ein vollständig regelmäßiger, sodaß meine Messungen mit der von Smith beobachteten Erscheinung im vollen Einklange stehen, und als ihre Erklärung aufzufassen sind. Die neuen Erscheinungen sind in voller Reinheit nur an einer sich stets erneuernden Quecksilberoberfläche zu beobachten, und beweisen, daß die Verhältnisse nicht so einfach zu liegen scheinen, wie sie auch bei den neuesten Theorien¹⁾ angenommen werden.

1) J. J. van Laar, Zeitschr. f. phys. Chem. 41. p. 385. 1902.

Tabelle 21.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | KCl | | NaCl |
|----------------------------------|--|--|--|
| | I. | II. | |
| | $\sigma_{18,1^\circ} = 1,0025$ $t = 16,2^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{19,8^\circ} = 1,0050$ $t = 18,0^\circ \pm 0,1^\circ$ | $\sigma_{20,1^\circ} = 1,0053$ $t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$ |
| 0,0 | 248,8 | 252,0 | 244,2 |
| 0,100 | 265,4s | 269,3 | 259,9 |
| 0,150 | — | — | 263,6 |
| 0,200 | 274,2s | 260,0 | 260,0 |
| 0,240 | — | — | 257,2 |
| 0,300 | 275,5s | 271,3s | 266,4 |
| 0,400 | 280,3s | 274,0s | 270,1s |
| 0,500 | 282,6 | 275,2s | 269,9s |
| 0,600 | 287,9 | 274,9 | 269,6 |
| 0,700 | 292,6s | 280,2 | 273,3s |
| 0,800 | 285,6 | 281,0s | 271,1s |
| 0,900 | 280,6s | 272,4s | 268,0 |
| 1,000 | 273,0 | 268,2 | 263,5 |
| 1,100 | 265,3s | 261,3 | 257,9 |
| 1,200 | 255,5 | 258,0 | 242,9 |
| 1,300 | 244,1 | — | — |
| 1,400 | 233,1 | — | — |
| 1,500 | 221,3 | — | — |
| 1,600 | 209,7 | — | — |
| 1,700 | 197,1 | — | — |
| 1,800 | 183,0s | — | — |
| 1,900 | 167,7 | — | — |
| 2,000 | 144,3s | — | — |

2. Die Bestimmungen der zur maximalen Oberflächenspannung zugehörigen elektromotorischen Kraft könnten beeinflusst werden durch die Autodepolarisation. Wenn man nämlich die natürliche Potentialdifferenz an der kleinen Elektrode verändert, so muß ein Depolarisationsstrom entstehen, welcher die beständige Tendenz der „polarisierten“ Elektrode vorstellt, die ursprüngliche Potentialdifferenz anzunehmen. Der Einfluß der Depolarisation äußert sich in der Erzeugung eines Potentialgefälles innerhalb des Elektrolyten nach dem Ohmschen Gesetze, und be-

steht in einer langsameren Veränderung der Potentialdifferenz an der kleinen Elektrode, als der zugeschalteten elektromotorischen Kraft. Die Einstellungen eines Kapillarelektrometers erfolgen bei Einschaltung eines sehr großen Widerstandes langsamer, als ohne Widerstand; wenn im Tropfapparat unterdessen ein Tropfen abfällt, so geschah es bei einer gegenüber der eingeschalteten desto kleineren elektromotorischen Kraft, je größerer Widerstand sich im Stromkreis befindet. Diesen Einfluß der Depolarisation untersuchte ich bei HCl, KCl und KOH, indem ich in die Zuleitung zum Potentiometer verschiedene Widerstände W (vgl. Fig. 1) einschaltete. Es waren induktionslose Graphitetriche auf Glastafeln, deren Widerstand innerhalb einer Messung sich nie mehr als höchstens um $\frac{1}{2}$ Proz. änderte.

Die Resultate der Messungen sind in den Tab. 22 und 23 enthalten.

Wie wir aus der graphischen Darstellung auf Taf. II sehen können, ist der Einfluß der Depolarisation bei fallenden Tropfen ziemlich groß. Das Maximum bei der Chlorwasserstoffsäure verschiebt sich von 0,575 Volt

| | | |
|----------------------|-----------------|------------------------------|
| durch den Widerstand | 45900 Ω | auf 0,815, also um 0,24 Volt |
| " " | 96700 Ω | " 1,102 " " 0,45 " |
| " " | 372000 Ω | " 2,7 " " 2,13 " |
| " " | 976000 Ω | " 6,5 " " 5,93 " |

und ähnlich bei KOH durch 92000 Ω um 0,373 und bei KCl durch denselben Widerstand um 0,305 Volt. Die Beobachtungen bei HCl zeigen, wie sich von vornherein erwarten läßt, eine Proportionalität der Verschiebung mit dem eingeschalteten Widerstand. Diese beträgt bei HCl im Mittel 0,00542 Volt, bei KOH 0,00405 und bei KCl 0,00332 Volt für jedes Tausend Ohm. Diese Verschiebung kann unsere Messungen nicht beeinflussen haben, da das Tropfelektrometer bei der von allen benutzten Lösungen am schlechtesten leitenden verdünnten KJ-Lösung unmittelbar vor dem Tropfenabfall einen inneren Widerstand von nur 400 Ω hatte. Dagegen äußert sich der Einfluß der Autodepolarisation bei sehr schlechten Leitern, wie Alkohol, sogar auch Wasser in einem stark fühlbaren Maße.

Das nähere Studium der beiden in diesem Abschnitte beschriebenen Erscheinungen soll in einer weiteren Arbeit fortgesetzt werden.

Tabelle 22.

HCl, $\sigma_{18,0^\circ} = 1,0320$.

| Polarisier. E.M.K. in Volt | $W = 0$ | $W = 45\,900\ \Omega$ | $W = 96\,700\ \Omega$ | $W = 372\,000\ \Omega$ | $W = 976\,000\ \Omega$ |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | $t = 18,6^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 18,3^\circ \pm 0,1^\circ$ | $t = 18,5^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 16,1^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 16,2^\circ \pm 0,1^\circ$ |
| — | 227,6s | 229,9 | 230,4 | 234,5s | 236,6 |
| 0,100 | 243,4 | 235,5 | 233,4s | — | — |
| 0,200 | 253,8 | 243,25 | 238,1 | 235,4 | — |
| 0,300 | 261,7s | 250,9 | 244,1 | — | — |
| 0,400 | 267,9 | 257,6 | 249,5 | 236,4 | — |
| 0,500 | 272,0 | 263,6 | 259,8 | — | 237,8 |
| 0,600 | 272,8s | 268,4 | 256,6 | — | — |
| 0,700 | 271,0s | 271,6 | 264,7 | — | — |
| 0,800 | 267,0 | 273,05 | 268,8 | 240,4s | — |
| 0,900 | 261,4 | 272,4 | 271,5 | — | — |
| 1,000 | 252,0s | 269,9 | 272,9 | — | 238,7 |
| 1,100 | 239,6* | 266,6 | 272,4 | — | — |
| 1,200 | 229,8* | 262,45 | 270,1 | 248,7 | — |
| 1,300 | — | 252,1 | 267,8s | — | — |
| 1,400 | — | 247,75 | 263,2 | 251,0 | — |
| 1,500 | — | 244,9* | 258,0 | — | 239,8 |
| 1,600 | — | — | 251,6 | 253,2s | — |
| 1,800 | — | — | 239,5s | 258,5 | — |
| 2,00 | — | — | 229,6 | 263,3 | 241,1 |
| 2,20 | — | — | 216,2 | 268,1 | — |
| 2,40 | — | — | — | 272,2 | — |
| 2,50 | — | — | — | — | 244,0 |
| 2,60 | — | — | — | 272,9 | — |
| 2,80 | — | — | — | 272,7 | — |
| 3,00 | — | — | — | 271,5 | 248,0 |
| 3,20 | — | — | — | 267,1 | — |
| 3,40 | — | — | — | 260,4 | — |
| 3,80 | — | — | — | 245,0 | — |
| 4,00 | — | — | — | — | 255,8 |
| 4,20 | — | — | — | 230,7 | — |
| 5,00 | — | — | — | 206,7* | 264,7 |
| 6,00 | — | — | — | — | 272,9 |
| 7,00 | — | — | — | — | 273,8 |
| 8,00 | — | — | — | — | 270,8* |

Tabelle 23.

$$W = 92000 \Omega.$$

| Polarisierende E.M.K. in Volt | KOH | KCl |
|-------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | $\sigma_{16,0^\circ} = 1,0430$ | $\sigma_{16,8^\circ} = 1,1518$ |
| | $t = 15,8^\circ \pm 0,2^\circ$ | $t = 16,4^\circ \pm 0,2^\circ$ |
| — | 265,8 | 234,6 |
| 0,100 | 267,0 | 237,8 |
| 0,200 | 267,6 _s | 243,1 _s |
| 0,300 | 268,4 | 251,8 _s |
| 0,400 | 270,9 | 260,2 _s |
| 0,500 | 272,6 _s | 268,4 |
| 0,600 | 273,0 _s | 275,0 |
| 0,700 | 272,1 | 281,9 |
| 0,800 | 269,7 | 286,6 |
| 0,900 | 266,4 | 287,8 _s |
| 1,000 | 262,2 | 284,1 _s |
| 1,100 | 257,3 _s | 278,4 _s |
| 1,200 | 252,9 | 271,4 _s |
| 1,300 | 248,0 | 264,0 _s |
| 1,400 | 243,4 | 256,7 _s |
| 1,500 | 238,4 | 248,1 |
| 1,600 | 233,3 | 241,6 |
| 1,700 | — | 233,2 _s |
| 1,800 | 222,0 _s | 225,2 |
| 1,900 | — | 218,8 |
| 2,000 | 210,8 | 212,2 |
| 2,200 | 199,3 _s | 202,9* |

VII. Zusammenfassung der Resultate. Zur Untersuchung der Größe der maximalen Oberflächenspannung wurde die Tropfenwägungsmethode benutzt, über welche einige neue Aufklärungen gegeben werden.

Es wird bewiesen, daß die angewandte Methode sich zur Aufnahme von *Elektrokapillarkurven* eignet, indem sie bei Säuren, eventuell konzentrierteren Salzlösungen richtige — d. h. mit den mittels „statischer“ Methoden gewonnenen übereinstimmende — Werte für die elektromotorische Kraft des Maximums und den Gang der Kurve ergibt.

Aus den maximalen Oberflächenspannungen wird der Satz abgeleitet, daß die Adhäsion zwischen Wasser und Quecksilber durch Lösung von Salzen zunimmt, und zwar mit wachsender Dichte zuerst schneller, dann langsamer; auf einen möglichen Zusammenhang der Größe der Änderung mit dem Molekulargewicht chemisch ähnlicher Salze wird hingewiesen.

Die „Kapazität der polarisierten Elektrode“ hat nicht nur für verschiedene Elektrolyte, sondern auch für verschiedene Konzentrationen desselben Elektrolyten verschiedene Werte.

Beim Kontakt einer frischen Quecksilberoberfläche mit einer Salzlösung kommen Prozesse vor, welche ein „sekundäres Maximum“ auf dem aufsteigenden Ast der Elektrokapillarkurve verursachen können. Dadurch wird das Verhalten des „statischen“ Kapillarelektrometers beim aufsteigenden Ast erklärt. Der Einfluß der Autodepolarisation auf die Angaben eines „Tropfenelektrometers“ wird festgestellt.

Darmstadt, Physikalisches Institut der techn. Hochschule,
Dezember 1902.

(Eingegangen 21. März 1903.)

3. *Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen;* von F. Pockels.

Aus Beobachtungen über die durch einseitigen Druck bewirkten optischen Änderungen kann man für Körper, deren Elastizitätskonstanten vollständig bekannt sind, den Einfluß beliebiger, innerhalb der Elastizitätsgrenzen bleibender Deformationen auf die Lichtfortpflanzung berechnen und kann davon insbesondere Anwendung machen, um die Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes von dem Einfluß der thermischen Dilatation zu befreien, also den *reinen Temperatureinfluß* zu ermitteln. Ich habe diese Untersuchung früher für Quarz und verschiedene reguläre Krystalle, sowie neuerdings für eine Reihe von Glasarten durchgeführt, wobei sich für die letzteren, sowie für den Quarz durchweg eine *Zunahme* der Brechungsindizes durch Temperaturerhöhung ohne Dilatationen herausstellte.¹⁾ Im folgenden will ich über die analoge Untersuchung am Kalkspat berichten, dessen optische Eigenschaften ja von besonderem Interesse sind, und für den genaue Bestimmungen der zu der erwähnten Berechnung nötigen elastischen und thermischen Konstanten vorliegen.

1. Formeln für Krystalle des rhomboedrischen Systems.

Die Gesetze der Fortpflanzung ebener Lichtwellen in durchsichtigen, doppeltbrechenden Kristallen lassen sich bekanntlich am einfachsten mit Hilfe einer, von Fresnel als Elastizitätsfläche, von Senff und F. Neumann als Ovaloid, neuerdings von Voigt als *Polarisationsovaloid* bezeichneten Fläche vierten

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 144. 269. 372. 1889; Ann d. Phys. 7. p. 745; 9. p. 220. 1902.

Grades darstellen, deren Gleichung in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem lautet ¹⁾

$$(1) r^4 = B_{11} x^2 + B_{22} y^2 + B_{33} z^2 + 2 B_{23} y z + 2 B_{31} z x + 2 B_{12} x y.$$

Eine Änderung des optischen Verhaltens wird also durch die Änderungen der Koeffizienten B_{hk} , der *Polarisationskonstanten* nach Voigts Bezeichnung, charakterisiert sein. Sind diese Änderungen durch nicht zu große Deformationen verursacht, so wird man sie gleich homogenen linearen Funktionen der sechs Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y$ (in der nach Kirchhoff üblichen Bezeichnung) setzen dürfen. Die Form dieser Functionen vereinfacht sich, wenn man ein den Symmetrieverhältnissen des Krystals angepaßtes Koordinatensystem X^0, Y^0, Z^0 zu Grunde legt. In dem für uns jetzt in Betracht kommenden Falle der *rhomboedriscen* Symmetrie werde die Z^0 -Achse in die dreizählige Symmetrieachse (die optische Achse des nicht deformierten Krystalles), die X^0 -Achse in eine der zweizähligen Symmetrieachsen gelegt und die positive Richtung der Y^0 -Achse so angenommen, daß sie aus einer Fläche des positiven Grundrhomboeders (+ R) austritt. Dann lautet der Ansatz für die veränderten Polarisationskonstanten, wie ich früher ²⁾ gezeigt habe:

$$(2) \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 + a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{14} y_x, \\ B_{22} = \omega_o^2 + a_{12} x_x + a_{11} y_y + a_{13} z_z - a_{14} y_x, \\ B_{33} = \omega_o^2 + a_{31} (x_x + y_y) + a_{33} z_z, \\ B_{23} = a_{41} (x_x - y_y) + a_{44} y_x, \\ B_{31} = a_{44} x_x + a_{41} y_y, \\ B_{12} = a_{14} x_x + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) x_y. \end{cases}$$

Darin bedeuten ω_o^0, ω_o^2 die ursprüngliche ordentliche und außerordentliche Hauptlichtgeschwindigkeit.

Für die Anwendung auf Beobachtungen, bei denen die Deformation durch *einseitigen Druck* hervorgebracht wird, ist es bequemer, die Größen B_{hk} als Funktionen der auf das

1) Ich behalte hier größtenteils die in meiner ersten, oben zitierten Arbeit gebrauchten Bezeichnungen bei, um die Vergleichung zu erleichtern.

2) F. Poekels, Wied. Ann. 37. p. 161. 1889.

Koordinatensystem $X^0 Y^0 Z^0$ bezogenen Druckkomponenten $X_x \dots Y_z \dots$ darzustellen. Solange die letzteren so klein sind, daß Proportionalität zwischen ihnen und den Deformationen besteht, können auch diese Funktionen als lineare angenommen werden. Ihre Form ergibt sich jedoch unter Rücksicht darauf, daß sich $X_x \dots Y_z \dots$ wie $X^2 \dots YZ \dots$, dagegen $x_x \dots y_z \dots$ wie $X^2 \dots 2 YZ \dots$ transformieren, etwas abweichend; man findet für das rhomboedrische System, wenn die neuen Koeffizienten mit $-\alpha_{hk}$ bezeichnet werden:

$$(3) \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^{01} - [\alpha_{11} X_x + \alpha_{12} Y_y + \alpha_{13} Z_z + \alpha_{14} Y_z], \\ B_{22} = \omega_o^{02} - [\alpha_{12} X_x + \alpha_{11} Y_y + \alpha_{13} Z_z - \alpha_{14} Y_z], \\ B_{33} = \omega_o^{03} - [\alpha_{31} (X_x + Y_y) + \alpha_{33} Z_z], \\ B_{23} = -[\alpha_{41} (X_x - Y_y) + \alpha_{44} Y_z], \\ B_{31} = -[\alpha_{44} Z_z + 2 \alpha_{41} X_y], \\ B_{12} = -[\alpha_{14} Z_z + (\alpha_{11} - \alpha_{12}) X_y]. \end{cases}$$

Zwischen den Konstanten a_{hk} und α_{hk} bestehen dann die Relationen:

$$(4) \quad a_{hk} = \sum_i^6 \alpha_{hi} c_{ki}, \quad \alpha_{hk} = \sum_i^6 a_{hi} s_{ki},$$

wo die $c_{ki} = c_{ik}$ die Elastizitätskonstanten, die $s_{ki} = s_{ik}$ die Elastizitätsmoduln (nach Voigts Bezeichnung) sind; speziell im vorliegenden Falle gilt:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11} = c_{11} \alpha_{11} + c_{12} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} + c_{14} \alpha_{14}, \\ a_{12} = c_{12} \alpha_{11} + c_{11} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} - c_{14} \alpha_{14}, \\ a_{13} = c_{13} (\alpha_{11} + \alpha_{12}) + c_{33} \alpha_{13}, \\ a_{14} = c_{14} (\alpha_{11} - \alpha_{12}) + c_{44} \alpha_{14}, \\ a_{31} = (c_{11} + c_{12}) \alpha_{31} + c_{13} \alpha_{33}, \\ a_{33} = 2 c_{13} \alpha_{31} + c_{33} \alpha_{33}, \\ a_{41} = (c_{11} - c_{12}) \alpha_{41} + c_{14} \alpha_{44}, \\ a_{44} = 2 c_{14} \alpha_{41} + c_{44} \alpha_{44}. \end{cases}$$

Um die optische Wirkung eines um die Z^0 -Achse symmetrischen Deformations- oder Drucksystems, wie es bei der thermischen Dilatation vorliegt, zu berechnen, ist nur die Kenntnis der Größen $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33} oder $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33}

erforderlich. Doch habe ich die Untersuchung auf die Bestimmung sämtlicher Konstanten ausgedehnt, da es mir im Hinblick auf die mechanische Erzeugung von Zwillingslamellen im Kalkspat auch von Interesse schien, die Änderung der Wellenfläche durch gewisse in Bezug auf die Hauptaxe nicht symmetrische Deformationen berechnen zu können.

Für die experimentelle Bestimmung der Konstanten α_{hk} ist zu beachten, daß von den optischen Symmetrieachsen X, Y, Z des deformierten Krystalles die eine (Z), welche aus der Z^0 -Achse hervorgeht, von dieser immer nur um einen sehr kleinen Winkel abweicht; die Drehungen um die X^0 - und Y^0 -Achse, durch welche sie in die neue Lage übergeht, sind nämlich gegeben durch

$$(6a) \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_x = \frac{2 B_{23}}{B_{22} - B_{33}},$$

$$(6b) \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_y = \frac{2 B_{31}}{B_{33} - B_{11}},$$

und hierin sind die Zähler kleine Größen erster Ordnung, d. h. von der Größenordnung der Deformationen, die Nenner dagegen sehr annähernd $= \pm (\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2})$, d. i. beim Kalkspat $\mp 0,0891$. Was die Richtung dieser Drehung betrifft, so ist aus den Ausdrücken (3) für B_{23} und B_{31} leicht zu erkennen, daß sie im Falle eines zur Hauptachse senkrechten einseitigen Druckes p , dessen Richtung mit der X^0 -Achse den Winkel ψ bildet, um eine Achse erfolgt, die gegen X^0 unter dem Winkel $+2\psi$ geneigt ist; dabei ist die Größe der Drehung von ψ unabhängig und sehr nahe durch

$$(6') \quad \Phi = \frac{\alpha_{41} p}{\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}}$$

gegeben. Liegt die Druckrichtung irgendwie in einer Symmetrieebene ($Y^0 Z^0$) oder senkrecht zu derselben ($\parallel X^0$), so geschieht die Drehung der Z -Achse natürlich in jener Symmetrieebene.

Berücksichtigt man das vorstehend Gesagte, so folgt aus der bekannten Konstruktion der Wellengeschwindigkeiten mit Hülfe des zur Wellenebene parallelen Schnittes des durch (1) dargestellten Ovaloids, daß für Fortpflanzungsrichtungen, die senkrecht zur Z^0 -Achse sind, die eine Geschwindigkeit bis auf kleine Größen zweiter Ordnung stets durch $\sqrt{B_{33}}$ gegeben ist und die andere sich durch B_{11} , B_{22} und B_{12} bestimmt; ferner,

daß für die Geschwindigkeiten in der Richtung der Z^0 -Achse nur B_{11} , B_{22} , B_{33} maßgebend sind.

Wirkt der Druck speziell parallel der Z^0 -, X^0 - oder Y^0 -Achse, so sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten in der bezeichneten Annäherung direkt durch $\sqrt{B_{11}}$, $\sqrt{B_{22}}$, $\sqrt{B_{33}}$ gegeben, welche Größen dann die Konstanten α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{31} , α_{33} enthalten. Die letzteren können daher durch Beobachtungen über die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten in den Richtungen X^0 , Y^0 , Z^0 , wenn ein einseitiger Druck parallel einer derselben ausgeübt wird, ermittelt werden. Zur Bestimmung der Konstante α_{41} , welche für die erwähnte *Drehung* der Z -Achse maßgebend ist, muß man, da diese Drehung, wie wir unten sehen werden, für die direkte Beobachtung zu klein ist, die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einer gegen die Z^0 -Achse schiefwinklig geneigten Richtung heranziehen. Für eine Fortpflanzungsrichtung, die im ersten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene mit der Y^0 -Achse den Winkel α bildet, ist nämlich die Geschwindigkeit der senkrecht zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierten Welle zufolge der Ovaloidgleichung gegeben durch

$$(7) \quad \omega_a^2 = B_{22} \sin^2 \alpha + B_{33} \cos^2 \alpha - B_{23} \sin 2\alpha,$$

ebenso für die hierzu senkrechte, im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gelegene Fortpflanzungsrichtung durch

$$(7') \quad \omega_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^2 = B_{22} \cos^2 \alpha + B_{33} \sin^2 \alpha + B_{23} \sin 2\alpha.$$

Hierin kommt also B_{23} vor, welches bei einem parallel der X -Achse ausgeübten Drucke proportional mit α_{41} ist. Aus der durch einen solchen Druck hervorgebrachten Verzögerung der erwähnten Welle gegen die andere, parallel zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierte, deren Geschwindigkeit $\sqrt{B_{11}}$ ist, kann daher α_{41} berechnet werden.

Die Konstanten α_{14} und α_{44} endlich, welche in (3) mit Y_i multipliziert auftreten, kommen zur Geltung, wenn man einen in der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen die Z^0 -Achse (am besten unter etwa 45°) geneigten Druck ausübt, und können aus den relativen Verzögerungen abgeleitet werden, welche man dann in der Richtung der X^0 -Achse und in der zur Druckrichtung senkrechten Richtung in der $Y^0 Z^0$ -Ebene beobachtet. Für erstere Richtung sind nämlich die Geschwindigkeiten durch $\sqrt{B_{22}}$ und $\sqrt{B_{33}}$, für

letztere durch $\sqrt{B_{11}}$ und eine der Formeln (7) gegeben, und in B_{11} oder B_{22} tritt im vorliegenden Falle α_{14} , in B_{22} α_{44} auf.

2. Anordnung und Berechnung der Beobachtungen.

Nach den im vorstehenden entwickelten Gesichtspunkten wurden die nachstehend zusammengestellten Orientierungen der für die Beobachtungen zu verwendenden Prismen (rechtwinkligen Parallelepipeda) gewählt. Wir bezeichnen dabei die Richtung der langen Kanten mit L , diejenige der kurzen mit D_1 bez. D_2 ; die Länge der ersteren betrug 20 mm, die der letzteren 6,0 mm bis auf Abweichungen von 0,01 mm, welche zu vernachlässigen sind. Die Herstellung der Prismen, deren Seitenflächen genau planparallel und fein poliert sein mußten, wurde von der Firma Dr. Steeg & Reuter in vortrefflicher Weise ausgeführt.

Prismengattung I. $L \parallel Z^0$, D_1 und D_2 irgendwie in der $X^0 Y^0$ -Ebene orientiert (wir können annehmen: $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Y^0$).

IIa. $L \parallel Y^0$, $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

IIb. $L \parallel X^0$, $D_1 \parallel Y^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

III. $L \parallel X^0$; D_1 senkrecht zur Fläche des Spaltungs-rhomboeders $+R$, also mit Y^0 den Winkel $\alpha = 45^\circ 28'$, mit Z^0 $\pi/2 - \alpha = 44^\circ 37'$ bildend; D_2 im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen Z^0 unter dem Winkel α geneigt.

IV. L in der $Y^0 Z^0$ -Ebene so gelegen, wie D_2 bei III.; D_1 parallel der Normale von $+R$; $D_2 \parallel X^0$.

Die Abweichungen von den hier angegebenen Orientierungen, welche teils durch Messung der Auslöschungsrichtungen im Polarisationsapparat, teils durch goniometrische Messung der Winkel gegen kleine angespaltene Flächen festgestellt wurden, waren so gering, daß sie im Vergleich mit den sonstigen Fehlerquellen, z. B. der Unsicherheit betreffs der Druckrichtung und Beobachtungsrichtung, nicht berücksichtigt zu werden brauchten.

Um aus den beobachteten Verzögerungen die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten und damit die Konstanten α_{hk} ableiten zu können, muß zunächst derjenige Teil der Verzögerung bekannt sein, welcher von der Dickenzunahme des Prismas in der Beobachtungsrichtung (D_1 oder D_2) herrührt. Nach-

stehend sind für die oben bezeichneten Prismen die einem longitudinalen Drucke p entsprechenden Druckkomponenten und die daraus berechneten Dickenzunahmen $D - D^0$ zusammengestellt. Die dabei benutzten Werte der Elastizitätsmoduln s_{hk} sind nach den Bestimmungen von Baumgarten und Voigt¹⁾:
 $s_{11} = 11,14 \cdot 10^{-5}$, $s_{12} = -3,67 \cdot 10^{-5}$, $s_{13} = -4,24 \cdot 10^{-5}$,
 $s_{33} = 17,13 \cdot 10^{-5}$, $s_{14} = 8,98 \cdot 10^{-5}$, $s_{44} = 39,52 \cdot 10^{-5}$,
 wobei, wie im folgenden immer, als Einheit des Druckes 1 kg-Gewicht pro mm^2 vorausgesetzt ist.

Prisma I. $X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0$, $Z_z = p$.

$$(8) \quad D - D^0 = -p D^0 s_{13} = +4,24 p D^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIa. $X_x = Z_z = Y_z = Z_x = X_y = 0$, $Y_y = p$.

$$(9) \quad D_1 - D_1^0 = -p D_1^0 s_{12} = +3,67 p D_1^0 \cdot 10^{-5},$$

$$(10) \quad D_2 - D_2^0 = -p D_2^0 s_{13} = +4,24 p D_2^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIb erfährt dieselben Dickenänderungen.

Prisma III. $X_x = p$, $Y_y = Z_z = Y_z = Z_x = X_y = 0$.

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 - D_1^0 &= -p D_1^0 (s_{12} \cos^2 \alpha + s_{13} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ &= -0,53 \cdot p D_1^0 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 - D_2^0 &= -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ &= +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

Prisma IV. $X_x = 0$, $Y_y = p \sin^2 \alpha$, $Z_z = p \cos^2 \alpha$, $Y_z = -\frac{1}{2} p \sin 2\alpha$, $Z_x = X_y = 0$.

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 - D_1^0 &= -p D_1^0 \{ (s_{11} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \cos^2 \alpha \\ &\quad + (s_{13} \sin^2 \alpha + s_{33} \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} (s_{14} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{44} \sin 2\alpha) \sin 2\alpha \}, \\ &\text{oder nahezu} \\ &= -\frac{1}{4} p D_1^0 (s_{11} + 2s_{13} + s_{33} - s_{44}) = +4,93 p D_1^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 - D_2^0 &= -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ &= +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right.$$

Die Beobachtungen betrafen die absoluten und relativen Verzögerungen der sich senkrecht zu den Seitenflächen der longitudinal komprimierten Prismen fortpflanzenden Wellen,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 39. p. 412 u. 432. 1890.

sowie in einem Falle die Änderung der Kurven gleichen Gangunterschiedes. Sie wurden ausschließlich mit Natriumlicht ausgeführt. Der Kompressionsapparat, sowie die Methoden zur Messung der absoluten Verzögerungen mittels Interferentialrefraktors, der relativen mittels Babinetschen Kompensators waren dieselben, welche ich bei der schon zitierten Untersuchung über das Verhalten verschiedener Glassorten angewendet und l. c. p. 747—750 beschrieben habe, so daß hier auf die dort gemachten Angaben verwiesen werden kann. Bezüglich der Anwendung des Druckhebels ist nur zu bemerken, daß derselbe hier, um etwaige Verschiebungen des darunterstehenden Kristallprismas sicherer zu vermeiden, nicht ganz abgehoben wurde, sondern immer mit der $\frac{1}{2}$ kg wiegenden Wagschale belastet blieb, auf welche die weiteren Gewichte mit der Hand aufgesetzt wurden. Aus diesen Gewichten G bestimmt sich dann der Druck p , welchem die beobachteten Änderungen entsprachen, gemäß der Relation

$$p = \frac{4,9}{D_1 \cdot D_2} \cdot G.$$

Die Belastung durfte bei einem Teil der Prismen nur relativ gering (gleich 2 kg) genommen werden, da sonst Zwillingslamellen nach der Gleitfläche $-\frac{1}{2}R$ entstanden. Bei diesen kleinen Belastungen wurden als Zwischenlagen zur Druckausgleichung dünne Kautschukplättchen, bei größeren Drucken Bleiplättchen verwendet.

Besondere Schwierigkeiten entstanden jedoch beim Kalkspat durch seine sehr starke Doppelbrechung, welche eine sehr starke Änderung der außerordentlichen Lichtgeschwindigkeit und des Gangunterschiedes mit der Richtung bedingt. Diese machte es notwendig, bei den Kompensatorbeobachtungen den ursprünglich vorhandenen großen Gangunterschied durch ein oder zwei mit dem zu komprimierenden Prisma in passender Weise verbundene andere Prismen größtenteils zu kompensieren. Hierdurch war zugleich der Einfluß von Temperaturschwankungen auf den Gangunterschied in der Hauptsache aufgehoben, welcher für ein einzelnes Kalkspatprisma von der hier benutzten Dicke in den Richtungen senkrecht zur Hauptachse $\frac{1}{9}$ Wellenlänge für 1° betragen und daher sehr störend sein würde. Die Befestigung der Kompensationsprismen vor

oder hinter dem zu untersuchenden Prisma geschah mittels Körnchen von Klebwachs, so daß sie nicht an der Kompression, wohl aber an den etwa durch die Belastung veranlaßten Drehungen des Versuchsprismas teilnahmen und die Änderungen des Gangunterschiedes, welche durch letztere sonst verursacht worden wären, ebenfalls kompensierten. Die Anordnung dieser Kompensationsprismen wird bei Mitteilung der Beobachtungsergebnisse für die einzelnen Fälle angegeben werden. Sie wurden in solcher Lage angeklebt, daß der schwarze Streifen des Babinet'schen Kompensators möglichst geradlinig und scharf erschien; allein dies war immerhin nur in sehr viel unvollkommener Weise zu erreichen, als bei isotropen Prismen, so daß auch die Genauigkeit der Einstellung eine erheblich geringere war. Bei den Messungen der absoluten Verzögerungen wurde, ganz ähnlich wie bei den früheren Beobachtungen an Glasprismen, neben dem zu untersuchenden Prisma ein zweites, gleiches, durch einen Metallrahmen mit ihm verbundenes Prisma in solchem Abstände aufgestellt, daß durch jedes der Prismen eines der beiden nachher zur Interferenz gelangenden Strahlenbündel hindurchging. Hierdurch wurde sowohl der sonst zu große ursprüngliche Gangunterschied der letzteren, als auch der Einfluß kompensiert, den andernfalls eine durch die Belastung etwa verursachte Drehung des Versuchsprismas gehabt hätte.

Es ist nun allerdings noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß das Kompensationsprisma *allein* eine Drehung erfährt, indem das zur Beobachtungsrichtung senkrechte Flächenpaar des zu untersuchenden Prismas infolge der Deformation des letzteren seine Richtung ändert, ohne daß sich das Prisma als ganzes dreht. Dies wird dann eintreten können, wenn sich die Winkel zwischen jenem Flächenpaar und den anderen Seitenflächen oder den Endflächen des Prismas bei dessen Kompression ändern; im ersteren Falle wird eine Drehung der Vorderfläche des Prismas um seine Vertikalachse, im zweiten Falle, da die den Druck erleidenden Endflächen wahrscheinlich sich selbst parallel bleiben werden, eine Neigung gegen die Vertikalrichtung stattfinden. Da es sich hierbei aber um sehr kleine Neigungen handelt, so wird ein merklicher Einfluß derselben auf den Gangunterschied bez. auf die

Differenz der Gangunterschiede im komprimierten und im Kompensationsprisma nur dann vorhanden sein können, wenn die Beobachtungsrichtung einen beträchtlichen Neigungswinkel gegen die optischen Symmetrieachsen besitzt, also nur bei den Prismen III und IV. Der Betrag der schädlichen Drehung ist höchstens gleich der Winkeländerung zwischen den zur X^0 -Achse parallelen Flächen, welche mit der Y^0 - und Z^0 -Achse Winkel von nahe 45° bilden. Dieselbe wird durch $z_x - y_y$ gemessen und beträgt somit

$$\text{bei Prisma III: } 0,57 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

oder für die meistens angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$:

$$0,15 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } \frac{1}{3}'';$$

$$\text{bei Prisma IV: } 1,55 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

$$\text{d. i. für } Q = 2 \text{ kg: } 0,42 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } 1''.$$

Einer Drehung von $1''$ würde eine Gangunterschiedsänderung von $0,0046 \lambda$ entsprechen, das ist ein Betrag, der innerhalb der Grenzen der direkten Beobachtungsfehler liegt. Es braucht also diese Fehlerquelle in unserem Falle nicht berücksichtigt zu werden; sie könnte aber bei anders orientierten Prismen, z. B. bei einem solchen, welches in der Richtung der Normale von $+R$ komprimiert würde, sehr wohl merklich werden.

Als Fehlerquellen, welche hiernach noch übrig bleiben, kommen hauptsächlich in Betracht: erstens Abweichungen der Druck- und Beobachtungsrichtung von den bei der Berechnung vorausgesetzten Richtungen, zweitens die Ungleichförmigkeit der Kompression. Die Abweichung der Druckrichtung von den Längskanten des Prismas konnte bei dem Verhältnis 20:6 der Längs- zu den Querdimensionen wohl nicht erheblich sein, zumal im mittleren Teil der Prismen, in dem die Beobachtungen zumeist ausgeführt wurden. Auch die Abweichung der Beobachtungsrichtung von der Plattenormale, welche durch Spiegelung kontrolliert werden konnte, betrug wohl nur selten (in solchen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung absichtlich etwas geneigt gewählt wurde, um den Interferenzstreifen besser parallel dem Kompensatorspalt zu machen) über 1° und kann daher wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung eine optische Symmetrie-

richtung war, gegenüber den direkten Beobachtungsfehlern von vornherein vernachlässigt werden. Schlimmer ist die zweite Fehlerquelle, die auch bei sorgfältigster Aufstellung des Prismas nie ganz zu vermeidende Ungleichförmigkeit der Druckverteilung über den Querschnitt. Bei den Kompensatormessungen wurde dieselbe durch Beobachtung an drei symmetrisch gelegenen Stellen (in der Mitte und in der Nähe des linken und rechten Randes der Prismenfläche) und Mittelbildung möglichst eliminiert; man kann annehmen, daß dies um so besser geschehen ist, je weniger das arithmetische Mittel der drei beobachteten Werte von dem in der Plattenmitte gefundenen differiert. Schwieriger war die Ungleichförmigkeit der Kompression bei den Messungen der *absoluten* Verzögerungen zu erkennen und zu eliminieren. Nach Möglichkeit wurde zwar auch dabei das Streifensystem, außer in der Mitte, einmal in der linken, einmal in der rechten Hälfte des Prismas erzeugt, indem das übrige Licht durch einen verschiebbaren Schirm mit schmalem, vertikalem Fenster abgeblendet wurde; doch waren manchmal die Interferenzstreifen in der einen Plattenhälfte zu schlecht, um genaue Einstellungen zu gestatten, und dann war man lediglich darauf angewiesen, die Beobachtung möglichst genau in der Mitte auszuführen und zur Kontrolle nach Neuaustellung des Prismas zu wiederholen. Die Genauigkeit der Resultate der absoluten Messungen steht demzufolge hinter derjenigen der Kompensatormessungen zurück. —

Die *absoluten Verzögerungen* konnten wegen der Polarisierung des Lichtes an den Platten des Interferentialrefraktors nur für die senkrecht zur Druckrichtung polarisierte Welle gemessen werden. Bezeichnen wir deren Geschwindigkeit, bezogen auf diejenige im leeren Raume als Einheit, mit ω_v (da der für ihre Geschwindigkeit maßgebende Fresnelsche Schwingungsvektor vertikal ist) und den ihr entsprechenden Brechungsindex $1/\omega_v$ mit n_v , die Wellenlänge in Luft mit λ , so gilt für die in Bruchteilen von λ ausgedrückte Verzögerung, d. i. die beobachtete Streifenverschiebung dividiert durch den Streifenabstand, der Ausdruck:

$$(15) \quad \delta = \frac{D^0 n_v^3}{2\lambda} \cdot (\omega_v^{02} - \omega_v^2) + \frac{D - D^0}{\lambda} \cdot (n_v - 1),$$

wobei der Brechungsindex der Luft = 1 gesetzt ist.

Die relative Verzögerung der vertikal polarisierten Welle (die durch den Index h bezeichnet werde) gegen die horizontal polarisierte ist gegeben durch

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_h - \delta_v &= \frac{A}{\lambda} = \frac{D^0}{2\lambda} \{ \omega_h^{02} - \omega_h^2 \} n_h^2 - (\omega_v^{02} - \omega_v^2) n_v^2 \} \\ &+ \frac{D - D^0}{\lambda} (n_h - n_v). \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Der Index 0 an den Brechungsindizes ist hier fortgelassen, da die Änderungen derselben so klein sind, daß die Werte vor und nach der Kompression hier nicht unterschieden zu werden brauchen. Unter D bez. D^0 ist in den vorstehenden Formeln die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung verstanden; $A = 14,04$ ist der Streifenabstand des Kompensators, gemessen in Umdrehungen der Mikrometerschraube, λ die zur Kompensation des Gangunterschiedes erforderliche Anzahl von Umdrehungen.

Die hiernach bestimmbaren Größen $\omega^{02} - \omega^2$ drücken sich für die einzelnen Prismengattungen, wie nach dem p. 729—730 Gesagten leicht zu ersehen ist, folgendermaßen durch die Konstanten α_{hk} aus.

Prismen I:

$$(17) \quad \omega_v^{02} - \omega_v^2 = \omega_h^{02} - \omega_h^2 = p \cdot \alpha_{33},$$

$$(18) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel Y^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{13}.$$

Prismen IIa:

$$(19) \quad \omega_o^{02} - \omega_o^2 = \omega_y^{02} - \omega_y^2 = p \cdot \alpha_{11},$$

$$(20) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel X^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{31},$$

$$(21) \quad \quad \quad \parallel Z^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{12}.$$

Die Prismen IIb geben dasselbe bei Vertauschung von Y mit X .

Prismen III:

$$(22) \quad \omega_o^{02} - \omega_o^2 = \omega_z^{02} - \omega_z^2 = p \alpha_{11},$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_2: \\ &\omega_h^{02} - \omega_h^2 = p (\alpha_{12} \cos^2 \alpha + \alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{41}) = p A_2, \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_1: \\ &\omega_h^{02} - \omega_h^2 = p (\alpha_{12} \sin^2 \alpha + \alpha_{31} \cos^2 \alpha - \alpha_{41}) = p A_1. \end{aligned} \right.$$

Prismen IV. Beobachtungsrichtung $\parallel D_1$ (Normale von $+R$):

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \omega_e^2 - \omega_o^2 &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^2 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \sin^2 2\alpha \} \\ \text{oder in genügender Näherung} \\ &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + \frac{1}{2} (\alpha_{13} + \alpha_{31}) + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^2 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \} \\ &= p A_3, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \omega_h^2 - \omega_k^2 &= \omega_o^2 - \omega_z^2 = p (\alpha_{13} \sin^2 \alpha + \alpha_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_3. \end{aligned} \right.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_2$, d. i. $\parallel X$. Hier sind die Polarisationsrichtungen (nahezu) parallel der Y^0 - und Z^0 -Achse, und für die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten ω_y und ω_z gilt:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \omega_y^2 - \omega_z^2 &= -B_{32} = p (\alpha_{11} \sin^2 \alpha + \alpha_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_3, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \omega_z^2 - \omega_x^2 = -B_{33} = p (\alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^2 \alpha) = p A_0.$$

Die für die Berechnung der vorstehenden Größen aus (15) und (16) in Betracht kommenden Brechungsindizes n_h und n_v haben folgende Werte:

Prisma I. $n_v = n_o^0 = 1,4864$, $n_h = n_o^0 = 1,6584$.

Prisma II. $n_v = n_o^0$, n_h bei Beobachtung $\parallel X = n_o^0$.

Prisma III. $n_v = n_o^0$, $n_h = 1,5665$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.

$n_h' = 1,568$ „ „ $\parallel D_2$.

Prisma IV. $n_v = 1,5665$, $n_h = n_o^0$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.

$n_v = n_o^0$, $n_h = n_o^0$ „ „ $\parallel D_2$.

Die aus den Beobachtungen der relativen Verzögerung in der Richtung Z^0 an den Prismen II gemäß (19) und (21) zu berechnende Differenz $\alpha_{11} - \alpha_{13}$ läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch aus Messungen der Kurven gleichen Gangunterschiedes ableiten, welche man auf den zur Z^0 -Achse senkrechten Flächen dieser Platten im konvergenten polarisierten Licht beobachtet. Im undeformierten Zustande sind diese Kurven bekanntlich konzentrische Kreise, und der in Luft beobachtete Winkelhalbmesser φ , des ν^{ten} , zwischen ge-

kreuzten Nicols ganz dunkel erscheinenden Kreises bestimmt sich durch die Gleichung

$$(29) \quad (\omega_x^2 - \omega_y^2) \sin^2 \varphi_v = v \cdot \frac{2 \omega_o \lambda}{D}.$$

Durch einen senkrecht zur Z-Achse ausgeübten einseitigen Druck wird der Kristall, wie aus den Grundformeln (3) folgt, optisch zweiachsig, wobei die Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht zur Druckrichtung ist, je nachdem $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, wie $\omega_o^2 - \omega_x^2$, oder wie der Charakter der Doppelbrechung. Beim Kalkspat liegt erfahrungsmäßig der zweite Fall vor, es *vergrößern* sich also infolge der Kompression die zur Druckrichtung senkrechten (bei unserer Versuchsanordnung *horizontalen* Ringdurchmesser. Wir wollen, um diese Vergrößerung zu berechnen, voraussetzen, die Druckrichtung sei die Y^0 -Achse, wie es bei den Prismen IIa der Fall ist. Dann gilt für den Gangunterschied der beiden Wellen in einer Richtung, die in der $Z^0 X^0$ -Ebene einen kleinen Winkel φ'_i mit der ersten Mittellinie und Plattennormale Z^0 bildet, die Formel

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2)(\sin^2 \varphi'_i - \sin^2 \Omega)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}$$

oder auch, da der halbe Winkel der optischen Achsen Ω durch

$$(30) \quad \sin^2 \Omega = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_x^2 - \omega_z^2}$$

gegeben ist,

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2) \sin^2 \varphi'_i - (\omega_y^2 - \omega_x^2)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}.$$

Führt man hierin durch die Relation

$$\sin \varphi'_i = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y) \sin \varphi'$$

den zu φ'_i gehörigen Austrittswinkel in Luft φ' ein, setzt für $\delta_1 - \delta_2$ den dem v^{ten} dunklen Ringe entsprechenden Wert v und läßt noch einige Vereinfachungen eintreten, die in Betracht der Kleinheit der für die ersten Ringe hier geltenden Werte von φ'_i zulässig sind, so erhält man schließlich für den horizontalen Winkelhalbmesser des v^{ten} Ringes in der komprimierten Platte die Gleichung:

$$(31) \quad (\omega_x^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_v' = v \frac{2 \lambda \omega_o}{D} + \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_o^2}.$$

Die Differenz der Gleichungen (30) und (31) ergibt dann die gesuchte Relation:

$$(32) \quad p(\alpha_{12} - \alpha_{11}) = \omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_0^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\sin^2 \varphi_1' - \sin^2 \varphi_1).$$

Dieselbe Bestimmung von $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gestattet natürlich das Prisma IIb.

Die Messung der Ringhalbmesser wurde mit Hilfe desselben, mikrometrisch um eine vertikale Achse drehbaren, für Parallelstrahlen eingestellten Fernrohres ausgeführt, welches zu den Beobachtungen am Interferentialrefraktor benutzt worden war. Dasselbe wurde mit dem Objektiv dicht vor dem unter dem Druckhebel stehenden Prisma aufgestellt und so gedreht, daß der vertikale Faden einen der dunklen Ringe tangierte, welche man bei Anwendung eines Polarisators und Analysators mit unter $\pm 45^\circ$ gegen die Vertikale geneigten Polarisationssebenen wahrnahm (von denen aber bei der starken Fernrohrvergrößerung immer nur ein kleines Stück im Gesichtsfelde erschien). Indem diese Einstellung am linken und rechten Ende des horizontalen Durchmessers der beiden ersten Ringe vor und nach Belastung des Prismas mehrmals gemacht wurde, konnten die Änderungen $\varphi_1' - \varphi_1$ und $\varphi_2' - \varphi_2$ mit großer Genauigkeit (bis auf etwa $10''$) gemessen werden.

3. Beobachtungsergebnisse.

Die im folgenden mitgeteilten Zahlen sind immer bereits Mittelwerte, die aus einer größeren Anzahl (bei den Kompensatorbeobachtungen immer je 5) von einzelnen Einstellungen vor Belastung, bei Belastung und nach Wiederaufhebung derselben abgeleitet sind.

Prismengattung I (Druck $\parallel Z$).

Absolute Verzögerungen δ .

Prisma 1. Belastung $G = 4$ kg.

| Mitte | Links | Rechts | |
|-------|-------|--------|--|
| 0,157 | 0,161 | 0,158 | Mittel für $G = 1$: $\delta_1 = 0,0895$. |

Prisma 2. Mittel aus 28 Beobachtungen genau in der Mitte reduziert auf $G = 1$: 0,0419.

Insgesamt: $\delta_{11} = 0,041$.

Hieraus berechnet nach (15) mit Benutzung von (8) und (17):

$$\alpha_{22} = + 4,4 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerungen.

Zur Kompensation wurde das zweite Prisma derselben Art quer vor das zu komprimierende geklebt, so daß die Z^0 -Achsen beider gekreuzt lagen.

Prisma 1. $G = 2$.

| Links | Mitte | Rechts |
|------------------|-------|--------|
| $\Delta = 2,105$ | 2,17 | 2,27 |

Mittel: 2,18

Prisma 2. $G = 2$.

| Links | Mitte | Rechts |
|-----------------|-------|--------|
| $\Delta = 2,21$ | 2,18 | 2,01 |

Mittel: 2,13

Prisma 2. $G = 5$.

| Links | Mitte | Rechts |
|-----------------|-------|--------|
| $\Delta = 4,45$ | 5,58 | 6,88 |

Mittel: 5,64

Prisma 2, um 180° gedreht.

| Links | Mitte | Rechts |
|-----------------|-------|--------|
| $\Delta = 5,52$ | 5,52 | 5,46 |

Mittel: 5,50

Gesamtmittel für $G = 1$: $\Delta_1 = 1,097$, $(\delta_2 - \delta_1)_1 = 0,078$.

Hieraus in Verbindung mit δ_2 , nach (16), (8) und (18) berechnet

$$\alpha_{13} = 24,8 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung IIa (Druck $\parallel Y^0$).

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, absolute Verzögerungen δ_v .

Prisma 1. $G = 5,5$ kg.

| Links | Mitte | Rechts |
|-------|-------|--------|
| 0,098 | 0,104 | 0,080 |

Prisma 2. $G = 5,5$ kg.

| Links | Mitte | Rechts |
|--------|--------|--------|
| 0,0806 | 0,0923 | 0,0886 |

Mittel für $G = 1$: 0,0165

0,0158

Zusammen: $\delta_{v1} = 0,0162$.

Daraus nach (15), (9), (19): $\alpha_{11} = -5,5 \cdot 10^{-6}$.

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, relative Verzögerungen.

Zur Kompensation diente jeweils die andere Platte derselben Art in gekreuzter Lage.

| | Links | Mitte | Rechts | Mittel | Δ_1 |
|-------------------|-------|-------|--------|--------|------------|
| Prisma 1. $Q = 5$ | 3,52 | 3,62 | 3,45 | 3,55 | 0,71 |
| „ 1. $Q = 8$ | 1,60 | 1,925 | 2,08 | 1,87 | 0,623 |
| „ 1. $Q = 3$ | 2,25 | 1,90 | 1,76 | 2,00 | 0,67 |
| „ 1. $Q = 5$ | 3,39 | 3,19 | 2,78 | 3,12 | 0,624 |
| „ 2. $Q = 3$ | 2,31 | 1,93 | 1,48 | 1,91 | 0,637 |

Zusammen: $\Delta_1 = 0,652$, $(\delta_2 - \delta_1)_1 = 0,0464$.

Nach der ersten Beobachtungsreihe an Prisma 1 war in demselben eine feine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$ entstanden, ebenso gleich von vornherein im Prisma 2; da dieselben parallel zur Beobachtungsrichtung verliefen, so störten sie zwar die

Kompensatorbeobachtungen nicht, erschwerten aber anscheinend die Erzielung einer gleichmäßigen Kompression.

Prismengattung IIb (Druck $\parallel X^0$). Relative Verzögerung $\parallel Y^0$.

| | | Links | Mitte | Rechts | Mittel |
|-----------|---------|-------|-------|--------|--------|
| Prisma 1. | $Q = 2$ | 1,07 | 1,27 | 1,42 | 1,25 |
| „ 2. | $Q = 2$ | 1,20 | 1,30 | 1,35 | 1,28 |

Zusammen: $\Delta_1 = 0,63$, $(\delta_x - \delta_y)_1 = 0,0450$.

Als Gesamtmittelwert ergibt sich aus den Beobachtungen an den Prismen IIa und IIb:

$$\delta_x - \delta_y = 0,0457$$

und hieraus nach (16) in Verbindung mit (9), (19) und (20):

$$n_s^2 \alpha_{31} - n_o^2 \alpha_{11} = 75,6 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, gemessen mit Kompensator.

| | | Links | Mitte | Rechts | Mittel |
|-----------|---------|-------|-------|--------|--------|
| Prisma 1. | $Q = 2$ | 1,30 | 1,33 | 1,34 | 1,32 |
| „ 2. | $Q = 2$ | 1,40 | 1,33 | 1,22 | 1,32 |

$$\Delta_1 = 0,66, (\delta_x - \delta_y)_1 = (\delta_z - \delta_y)_1 = 0,047.$$

Hieraus nach (16), (19) und (21):

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} = \alpha_{12} - \alpha_{11} = 14,9 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, bestimmt aus Ringdurchmessern bei derselben Aufstellung der Platten, wie bei den Kompensatormessungen.

Prisma 1.

$$\begin{aligned} Q = 2 \quad \varphi_1' &= 132' 46,4'', \quad \varphi_1^0 = 126' 42,4'', \quad \text{daraus nach (31):} \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,30 \cdot 10^{-6} \\ Q = 3 \quad \varphi_1' &= 135' 32,8'', \quad \varphi_1^0 = 127' 1'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 6,12 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad \varphi_2' &= 182' 49,9'', \quad \varphi_2^0 = 178' 40,3'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,12 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} : 15,23 \cdot 10^{-6}.$$

Prisma 2.

$$\begin{aligned} Q = 2 \quad \varphi_1' &= 132' 15'', \quad \varphi_1^0 = 126' 33'', \quad \text{daraus nach (31):} \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,03 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad \varphi_2' &= 182' 57'', \quad \varphi_2^0 = 178' 39'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,28 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad \varphi_3' &= 182' 54,1'', \quad \varphi_3^0 = 178' 47,6'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,08 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} : 15,06 \cdot 10^{-6}.$$

Ringdurchmesserbeobachtungen an den Prismen IIa ergaben ebenso den Mittelwert:

$$14,8 \cdot 10^{-6}.$$

Insgesamt folgt aus den Messungen der Ringe und denen mit Kompensator:

$$\alpha_{12} - \alpha_{11} = 15,0 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung III (Druck $\parallel X^0$).

Beobachtungsrichtung: die Rhomboedernormale (Richtung D_1).

Absolute Verzögerung δ_x .

Prisma 2.

$Q = 4$ Mittel aus zahlreichen Beobachtungen: $(\delta_x)_4 = -0,098$.

$Q = 5$ Mittel $(\delta_x)_5 = -0,129$ und $-0,1165$.

Insgesamt: $(\delta_x)_{Q=1} = -0,0242$.

Daraus nach (15), (11), (22): $\alpha_{11} = -6,10 \cdot 10^{-6}$.

Das negative Vorzeichen von δ bedeutet, daß die Verschiebung der Interferenzstreifen bei Kompression der einen Platte hier, im Gegensatz zu allen anderen Fällen, in demjenigen Sinne erfolgte, welcher einer *Abnahme* des Gangunterschiedes entsprach. Nun ist zwar für die Richtung der Rhomboedernormale, wie der Wert (11), p. 732 zeigt, auch die *Querdilatation negativ*, allein die daraus resultierende Abnahme der Verzögerung der ordentlichen Welle ist nur etwa der fünfte Teil der beobachteten, so daß tatsächlich eine *Zunahme ihrer Geschwindigkeit* stattgefunden hatte; dem entspricht das *negative* Vorzeichen von α_{11} .

Relative Verzögerung.

Zur Kompensation wurde zunächst an die Vorderfläche ein Prisma der Gattung IV in solcher Lage angeklebt, daß die X^0 -Achse ebenfalls vertikal und die Z^0 -Achse spiegelbildlich zu derjenigen des zu komprimierenden Prismas in Bezug auf dessen Vorderfläche lag; in dieser Kombination ist der Gangunterschied in der Beobachtungsrichtung ein Maximum, ändert sich also durch kleine Drehungen nicht. Um nun den sehr großen absoluten Betrag des Gangunterschiedes in dieser Kombination und dessen Änderung mit der Temperatur aufzuheben, wurde zweitens an der Hinterfläche des Versuchsprismas ein Prisma der Gattung II mit vertikal gestellter Z^0 -Achse befestigt, welches für sich in der zur Z^0 -Achse senkrechten Beobachtungsrichtung nahezu den entgegengesetzten Gangunterschied gibt, wie die beiden ersten Prismen zusammen, in welchen ja die Beobachtungsrichtung Winkel von nahe 45° mit der optischen Achse bildet. Um gute Kompensatorstreifen zu erhalten, war es aber oft zweckmäßig, dem einen Kompensations-

prisma eine kleine seitliche Neigung zu geben. Die Messungen ergaben:

| | | Links | Mitte | Rechts | Mittel |
|-----------|------------|-------|-------|--------|--------|
| Prisma 2. | $Q = 2$ | 2,18 | 2,06 | 1,90 | 2,05 |
| " | 2. $Q = 2$ | 2,23 | 2,03 | 1,87 | 2,04 |
| " | 1. $Q = 2$ | 2,10 | 2,18 | 2,11 | 2,11 |

$$\Delta_{Q=1} = 1,033, (\delta_h - \delta_e)_{Q=1} = 0,0736.$$

Hieraus berechnet nach (16), (11), (22) und (24)

$$n_h^3 A_1 - n_e^3 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}$$

oder

$$3,84 A_1 - 4,56 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_1$.

Absolute Verzögerung δ_e .

Prisma 2. $G = 4$ kg.

Aus 11 Beobachtungen in der Mitte: $\delta_e = 0,238$.

Aus je 3 Beobachtungen am linken bez. rechten Rand: 0,194 bez. 0,271.

Insgesamt: $(\delta_e)_{Q=1} = + 0,0585$.

Hier ist die beobachtete Verzögerung positiv, aber kleiner als die von der Dickenänderung allein herrührende; für α_{11} ergibt sich daher nach (15), (12) und (22) in Übereinstimmung mit den früheren Bestimmungen ein *negativer* Wert und zwar

$$\alpha_{11} = - 5,92 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung.

| | | Links | Mitte | Rechts | Mittel |
|-----------|---------|-------|-------|--------|--------|
| Prisma 1. | $G = 4$ | 1,23 | 1,51 | 1,57 | 1,45 |
| | $G = 2$ | 0,66 | 0,80 | 0,85 | 0,77 |
| Prisma 2. | $G = 4$ | 1,43 | 1,56 | 1,66 | 1,55 |
| | $G = 4$ | 1,39 | 1,49 | 1,65 | 1,51 |

Insgesamt: $\Delta_{Q=1} = 0,378, (\delta_h - \delta_e)_{Q=1} = 0,027$.

Hieraus folgt nach (16), (12), (22) und (23):

$$n_h^3 A_2 - n_e^3 \alpha_{11} = 3,82 A_2 - 4,56 \alpha_{11} = 54,74 \cdot 10^{-6}.$$

Für α_{11} wollen wir das Mittel aus den an den Prismen III gefundenen Werten, also

$$\alpha_{11} = - 6,0 \cdot 10^{-6}$$

annehmen, da die Bestimmung an IIa wegen der anscheinend ungleichförmigen Kompression und schlechten Beschaffenheit der Streifen weniger sicher ist.

Dann folgt

$$\alpha_{11} = 9,0 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{21} = 15,5 \cdot 10^{-6},$$

$$A_1 = 7,15 \cdot 10^{-6}, \quad A_2 = 20,2 \cdot 10^{-6}$$

und hieraus

$$2\alpha_{41} = A_2 - A_1 + (\alpha_{21} - \alpha_{11}) \cos 2\alpha = -18,2 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{41} = -6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werten der α_{hk} die relativen Verzögerungen $\Delta_{Q=1}$ für die Prismen III, so findet man

$$\text{für die Richtung } D_1: 0,983 \text{ (beobachtet } 1,033)$$

$$\text{" " " } D_2: 0,322 \text{ (" } 0,373)$$

Die Differenzen vom Betrage $\pm 0,05$ zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind nicht größer, als bei der Unsicherheit, die den Messungen in diesen Richtungen anhaftete, zu erwarten war.

Prismengattung IV.

(Druck in der YZ -Ebene senkrecht zur Normale von $+R$).

Hier konnten nur die relativen Verzögerungen beobachtet werden.

Beobachtungsrichtung: die Normale von $+R$ (D_1).

Die zur Kompensation des ursprünglichen Gangunterschiedes dienende Plattenkombination war dieselbe wie bei der Gattung III. Damit die Streifen des Kompensators hinreichend parallel den vertikalen Spalträndern erschienen, mußte die Beobachtungsrichtung etwas nach aufwärts oder abwärts geneigt genommen werden, hatte also nicht genau die bei der Berechnung vorausgesetzte, zur Druckrichtung senkrechte Richtung; doch kommt der hierdurch bedingte Fehler gegenüber den Abweichungen der Beobachtungen untereinander kaum in Betracht.

| | Links | Mitte | Rechts | Mittel |
|-------------------|-------|-------|--------|--------|
| Prisma 1. $Q = 2$ | 3,38 | 3,05 | 2,97 | 3,13 |
| $Q = 2$ | 3,21 | 3,28 | 3,30 | 3,26 |

$$\text{Mittelwert: } \Delta_{Q=1} = 1,60, \quad \delta_h - \delta_v = 0,114.$$

Hieraus nach (16) und (13), (25), (26)

$$n_o^* A_1 - n_s^* A_2 = 4,56 A_1 - 3,84 A_2 = 155,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung: die X -Achse (D_2).

Zur Kompensation diente das zweite Prisma derselben Art, welches mit der X -Achse ebenfalls parallel zur Beobachtungsrichtung, aber in um 90° gedrehter Stellung angeklebt

wurde. Da die Schwingungsrichtungen hier um nahe 45° gegen die vertikale Druckrichtung geneigt waren, so mußte auch der Kompensator aus seiner gewöhnlichen Stellung (mit vertikalem Spalt) um 45° gedreht werden. Der dunkle Streifen verlief dann also schräg über die vordere Prismenfläche, und es konnten daher nicht gut besondere Einstellungen nahe an den Rändern (links und rechts) gemacht werden. Die Gleichmäßigkeit der Kompression konnte jedoch dadurch, daß sich der Streifen in der ganzen Plattenbreite gleichmäßig parallel mit sich selbst verschieben mußte, kontrolliert werden, freilich bei der hier sehr geringen Verschiebung nicht so gut wie sonst; eingestellt wurde dann im mittleren Teil der Platte. Der Kompensatorspalt war bei den folgenden Beobachtungen parallel der Y^0 -Achse gestellt, so daß die Messung, wie sonst $\delta_h - \delta_v$, so hier $\delta_z - \delta_y$ ergab. Da der Kompensator bei Belastung der Platte zurückgedreht werden mußte, so findet sich letztere Größe negativ.

| | Prisma 1 | Prisma 2 | |
|---------|----------|----------|-------|
| $Q = 2$ | -0,25 | -0,27 | -0,22 |
| $Q = 4$ | -0,52 | -0,54 | -0,49 |

Als Mittelwert für $Q = 1$ kann gelten:

$$A_1 = -0,13, \delta_y - \delta_z = +0,0091.$$

Die Dickenzunahme, welche eine relative Verzögerung der senkrecht zur Y^0 -Achse polarisierten Welle bewirkt, ist hier so groß, daß nach Abzug ihres Einflusses sich das Vorzeichen umkehrt. Es folgt nach (16) und (14), (27), (28):

$$n_e^2 A_5 - n_o^2 A_5 = 4,56 A_5 - 3,29 A_5 = -15,9 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte von α_{31} , α_{33} , α_{11} , α_{13} wird

$$A_5 = 10,08 \cdot 10^{-6}, \quad A_5 = 9,2 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{14},$$

und man findet aus der vorstehenden Gleichung

$$\alpha_{14} = -10,9 \cdot 10^{-6}.$$

Endlich wird $A_4 = 22,7 \cdot 10^{-6}$, $A_3 = 3,5 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{44}$ und es folgt aus der Gleichung $4,56 A_4 - 3,84 A_3 = 155,2 \cdot 10^{-6}$ für die letzte noch fehlende Konstante α_{44} der Wert

$$\alpha_{44} = -34 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Zahlwerte in die Gleichungen (3) erhalten wir schließlich folgende Darstellung der Polarisationskonstanten $B_{\lambda k}$ als Funktionen der Druckkomponenten (wobei letztere in Kilogramm pro mm^2 gemessen, und die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume gleich 1 gesetzt ist):

$$(3') \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 - [-6,0 X_x + 9,0 Y_y + 24,8 Z_z - 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{22} = \omega_o^2 - [9,0 X_x - 6,0 Y_y + 24,8 Z_z + 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{33} = \omega_o^2 - [15,5 (X_x + Y_y) + 4,4 Z_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{23} = [6,6 (X_x - Y_y) + 34 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{31} = [34 Z_z + 13,3 X_y] \cdot 10^{-6}, \\ B_{12} = [10,9 Z_z + 15,0 X_y] \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

4. Anwendungen der gefundenen Resultate.

Von speziellen Folgerungen aus den Formeln (3') seien folgende hervorgehoben.

Allseitig gleicher Druck vermindert sowohl die ordentliche als die außerordentliche Lichtgeschwindigkeit, letztere aber stärker, so daß auch die Doppelbrechung abnimmt; es wird nämlich

$$\omega_o^2 - \omega_o'^2 = B_{11} = B_{22} = -27,8 \cdot 10^{-6} p,$$

$$\omega_o^2 - \omega_o'^2 = B_{33} = -35,4 \cdot 10^{-6} p.$$

Einseitiger Druck parallel der Hauptachse verringert ebenfalls beide Lichtgeschwindigkeiten, verstärkt aber die Doppelbrechung, denn es gilt für solchen:

$$\omega_o^2 - \omega_o'^2 = -24,8 \cdot 10^{-6} p, \quad \omega_o^2 - \omega_o'^2 = -4,4 \cdot 10^{-6} p.$$

Einseitiger Druck senkrecht zur Hauptachse macht den Kalkspat optisch' zweiachsig mit der Ebene der optischen Achsen senkrecht zur Druckrichtung und einem Achsenwinkel 2Ω , der nach (30) gegeben ist durch

$$\sin^2 \Omega = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{\omega_o^2 - \omega_o'^2} p \cdot 10^{-6}, \quad \sin \Omega = 0,013 \sqrt{p},$$

woraus z. B. für den Druck 1 kg/mm^2 $2\Omega = 3,0^\circ$ folgt.

Wie schon p. 729 erörtert wurde, bleibt dabei die erste Mittellinie (die Z -Achse) nicht streng parallel der Hauptachse

Z^0 des Kristalles, sondern dreht sich um eine Achse in der $X^0 Y^0$ -Ebene, welche mit der Druckrichtung P denselben Winkel bildet, wie diese mit der X^0 -Achse. Den Betrag dieser Drehung können wir jetzt nach der Formel (6') numerisch berechnen, er findet sich $= 74 \cdot 10^{-6} p$, d. i. für $p = 1 \text{ kg/mm}^2$ etwa $15''$. Bei den Prismen II a sowohl als II b mußte die Drehung um die Druckrichtung stattfinden und demgemäß bei den Beobachtungen im konvergenten Licht eine geringe seitliche Verschiebung des Zentrums des Ringsystems, oder eine Ungleichheit der bei der Kompression eintretenden Erweiterung der Ringe nach links und nach rechts zur Folge haben. Eine derartige Unsymmetrie war nun in den Messungen nicht zu erkennen, was sich indessen vollkommen dadurch erklärt, daß die Drehung der Mittellinie für die dabei angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$ zufolge vorstehender Berechnung nur $4''$ betrug. —

Aus den Größen α_{hk} können wir nun mit Hülfe der von Voigt bestimmten Elastizitätskonstanten:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 13,97 \cdot 10^3, & c_{12} &= 4,65 \cdot 10^3, & c_{13} &= 4,60 \cdot 10^3, \\ c_{33} &= 8,12 \cdot 10^3, & c_{44} &= 3,49 \cdot 10^3, & c_{14} &= -2,12 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

die Konstanten a_{hk} des Ansatzes (2) gemäß den Formeln (5) berechnen und erhalten:

$$\begin{aligned} a_{11} &= +0,095, & a_{12} &= +0,189, & a_{13} &= +0,215, \\ a_{31} &= +0,309, & a_{33} &= +0,178, \\ a_{14} &= -0,006, & a_{41} &= +0,010, & a_{44} &= -0,090. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Werte mit denjenigen, welche ich früher (l. c. p. 303) für die entsprechenden Konstanten des Quarzes bestimmt habe, zeigt, daß ihre Größenordnung für beide Körper übereinstimmt und daß auch in beiden Fällen a_{14} und a_{41} gegen die übrigen Konstanten sehr klein sind. Während aber beim Quarz fast genau $a_{31} = a_{13}$ gefunden wurde, findet diese Gleichheit hier auch nicht annähernd statt.

Das positive Vorzeichen der fünf ersten Konstanten zeigt, daß sowohl eine Dilatation parallel der Hauptachse, als eine solche in irgend einer Richtung senkrecht zu letzterer eine Zunahme der Lichtgeschwindigkeiten zur Folge hat. Das oben

(p. 743) gefundene auffällige Resultat, daß einseitiger Druck senkrecht zur Hauptachse eine Beschleunigung der senkrecht zur Druckrichtung polarisierten Welle hervorruft, ist hiernach durch den überwiegenden Einfluß der Querdilatationen zu erklären, welcher durch die gegen a_{11} großen Werte von a_{13} und a_{33} bedingt wird.

Ist die *Deformation rings um die Z^0 -Achse symmetrisch*, also $y_y = x_x$, so bleibt der Kristall natürlich optisch einachsrig, und es gilt:

$$(33) \quad \begin{cases} \omega_o^2 - \omega_e^2 = (a_{11} + a_{13})x_x + a_{13}z_z, \\ \omega_e^2 - \omega_s^2 = 2a_{31}x_x + a_{33}z_z. \end{cases}$$

Eine Dilatation $\parallel Z^0$ allein bewirkt wegen $a_{33} < a_{13}$ Abnahme der Doppelbrechung, eine solche in allen Richtungen $\perp Z^0$ Zunahme derselben; letzteres gilt auch von einer *allseitig gleichen* Dilatation.

Die Dilatation, welche durch eine *Temperaturerhöhung* von 1° erzeugt wird, ist charakterisiert durch

$$y_y = x_x = \alpha, \quad z_z = \gamma,$$

wobei die Ausdehnungskoeffizienten α, γ nach Benoît bei Zimmertemperatur die Werte haben

$$\alpha = -5,5 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = +25,5 \cdot 10^{-6}.$$

Die Einsetzung in (33) ergibt

$$\omega_o^2 - \omega_e^2 = \left(\frac{d\omega_o^2}{dt} \right) = +3,92 \cdot 10^{-6},$$

$$\omega_e^2 - \omega_s^2 = \left(\frac{d\omega_e^2}{dt} \right) = +1,15 \cdot 10^{-6},$$

und für die Änderungen der Hauptbrechungsindizes, welche wegen

$$d\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2\omega^3} d(\omega^2)$$

hieraus durch Multiplikation mit $n_o^3/2$ bez. $n_s^3/2$ erhalten werden:

$$\left(\frac{dn_o}{dt} \right) = -8,9 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_s}{dt} \right) = -1,9 \cdot 10^{-6}.$$

Die wirklichen Temperaturkoeffizienten der (absoluten) Brechungsindizes betragen hingegen:

Nach Vogel ¹⁾ (für eine Mitteltemperatur von 103° gültig):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,81 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,20 \cdot 10^{-6}.$$

Nach Reed ²⁾ (für eine Mitteltemperatur von 18° berechnet):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,69 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,57 \cdot 10^{-6}.$$

Benutzt man die letzteren Werte, so ergeben sich, indem man die oben berechneten Größen (dn_o/dt) und (dn_e/dt) davon subtrahiert, folgende Werte der reinen, d. h. vom Einfluß der Dilatationen befreiten Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes des Kalkspates:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = + 9,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = + 12,5 \cdot 10^{-6}.$$

Unter Zugrundelegung der Vogelschen Beobachtungen erhält man ebenso:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = 9,7 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = 12,1 \cdot 10^{-6}.$$

Die reinen Temperaturkoeffizienten haben also sehr beträchtliche positive Werte, welches Verhalten, da zugleich eine Zunahme der Dispersion mit der Temperatur stattfindet, nach Pulfrich ³⁾ wahrscheinlich durch eine Zunahme der Absorption oder ein Näherrücken der Absorptionsstreifen im Ultraviolett bedingt wird. Hr. Pulfrich hat in der unten zitierten Abhandlung unter anderen auch die reinen Temperaturkoeffizienten $\partial n_o/\partial t$ und $\partial n_e/\partial t$ des Kalkspats in der Weise berechnet, daß er auf die Änderung der beiden Hauptbrechungsindizes durch die Dilatation die Gladstone-Dalesche Regel, wonach $dn = -(n-1)(2\alpha + \gamma)$ wäre, anwandte. Dies ist jedoch, auch abgesehen davon, daß sich die Gladstone-Dalesche

1) G. Vogel, Wied. Ann. 25. p. 87. 1885.

2) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

3) F. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1892.

Formel auch bei isotropen festen Körpern als unzutreffend erwiesen hat, bei Kristallen schon von vornherein nicht zulässig, da hier die Verschiedenheit der Dilatation nach verschiedenen Richtungen von Einfluß sein muß. In der Tat ist der nach dieser Formel für (dn_e/dt) sich ergebende Wert $-7,04 \cdot 10^{-6}$ ganz verschieden von demjenigen, welchen ich aus meinen Beobachtungen oben abgeleitet habe ($-1,9 \cdot 10^{-6}$), während allerdings bei der ordentlichen Welle eine ziemlich große Annäherung an das Gladstonesche Gesetz stattfindet.¹⁾ So weicht denn auch der zweite der von Hrn. Pulfrich berechneten Werte der reinen Temperaturkoeffizienten:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = +10,34 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = +17,24 \cdot 10^{-6}$$

ganz erheblich von dem von mir gefundenen ($12,1 \cdot 10^{-6}$) ab.

Es kann verlockend scheinen, die im vorhergehenden gewonnenen Resultate auf diejenige besondere Deformation anzuwenden, welche ein Kalkspatkristall erleidet, wenn er durch mechanische Einwirkung in die *Zwillingsstellung* in Bezug auf eine *Gleitfläche*, d. i. eine Fläche des die Polkanten des Grundrhomboeders abstumpfenden Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$, übergeführt wird. Allerdings handelt es sich bei dieser „Schiebung nach einer Gleitfläche“ um eine Deformation, welche weit über die Elastizitätsgrenzen hinausgeht — es sind ja sogar am Ende der Deformation die elastischen Kräfte wieder Null — und die überdies durch *labile* Zustände hindurchführt. Wir werden also eine quantitative Anwendbarkeit unserer Formeln, die ja für sehr kleine, elastische Deformationen aufgestellt worden sind, nicht erwarten dürfen, sondern höchstens eine Übereinstimmung

1) Beim *Quarz* ist dies auch für die ordentliche Welle nicht der Fall; denn hier sind die aus den a_{α} und a_{γ} abgeleiteten Werte:

$$\left(\frac{dn_o}{dt}\right) = -13,3 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_e}{dt}\right) = -14,6 \cdot 10^{-6},$$

dagegen die aus der Gladstoneschen Formel berechneten $-18,8 \cdot 10^{-6}$ bez. $-19,2 \cdot 10^{-6}$. Aus ersteren Zahlen und den direkt von Reed beobachteten dn/dt folgt für Quarz

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = +7,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = +7,4 \cdot 10^{-6}.$$

hinsichtlich des *Sinnes* der optischen Änderungen. Letztere bestehen bei der Zwillingsbildung in einer einfachen *Drehung* der Wellenfläche von etwa $52\frac{1}{2}^\circ$ um die zu der Zwillingsfläche $-\frac{1}{2}R$ parallele Symmetrieachse X^0 im positiven Sinne (d. h. von der $+Y^0$ -Achse gegen die $+Z^0$ -Achse hin), denn die Z^0 -Achse bildet mit der Normale der Gleitfläche einen Winkel von $26\frac{1}{4}^\circ$. Da aber die „Schiebung“ parallel dem Hauptschnitt von $-\frac{1}{2}R$, welche den Krystall in die Zwillingsstellung überführt, keine reine Deformation, sondern die Kombination einer solchen mit einer *Drehung* von ca. 19° um die X^0 -Achse in *negativem* Sinne ist, so erfährt die optische Achse in Bezug auf die im Raume festliegend gedachten Hauptdilationsachsen eine Drehung von $+71\frac{1}{2}^\circ$. Unsere Formeln, welche ja die Wirkung einer reinen Deformation darstellen, setzen festliegende Hauptdilationsachsen voraus und müßten also den eben angegebenen Betrag der Drehung ohne Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten ergeben, wenn wir die der Schiebung entsprechenden Deformationsgrößen einsetzen. Letztere haben in Bezug auf das ursprüngliche Achsensystem $X^0 Y^0 Z^0$ die Werte:

$$x_x = 0, \quad y_y = -0,27, \quad z_z = +0,39, \quad y_z = +0,218, \quad z_x = x_y = 0.$$

Man erhält so

$$B_{23} = -0,0171, \quad B_{22} = \omega_z^2 + 0,0591 = 0,4227,$$

$$B_{33} = \omega_z^2 - 0,0143 = 0,4384$$

und nach Gleichung (6a):

$$2 \Phi_x = \arctg 342/157, \quad \Phi_x = +33^\circ.$$

Der *Sinn* der berechneten Drehung stimmt also mit demjenigen der bei der Zwillingsbildung wirklich stattfindenden überein, doch ergibt sich ihr Betrag erheblich zu klein.

Für die neue Hauptlichtgeschwindigkeit ω_x würde sich aus der Gleichung

$$\omega_x^2 = B_{22} \sin^2 \Phi_x + B_{33} \cos^2 \Phi_x - B_{23} \sin 2 \Phi_x$$

der Wert 0,671 bestimmen, der in der Tat nur sehr wenig von dem ursprünglichen Werte $\omega_z^0 = 0,6729$ abweicht. Für ω_y und ω_z erhielte man aber größere Abweichungen von ihrem

gemeinschaftlichen ursprünglichen Werte $\omega_0 = 0,6030$. — Man kann also nur sagen, daß die Änderung des optischen Verhaltens des Kalkspats, welche durch die bei der Schiebung nach einer Gleitfläche — $\frac{1}{2}R$ stattfindende Deformation bei deren Beginne (solange sie noch innerhalb der Elastizitätsgrenzen liegt) eingeleitet wird, dem Sinne nach geeignet scheint, in ihrem weiteren Verlaufe die mit der Zwillingsbildung wirklich verbundene Änderung der optischen Orientierung herbeizuführen.

(Eingegangen 21. April 1908.)

Die folgende Untersuchung wurde angestellt, um zu einer besseren Kenntnis der Kalkspatstruktur zu gelangen. Sie ist insofern Ausgangspunkt für die Arbeiten von G. L. und T. L. (1908) (1909) (1910) (1911) (1912) (1913) (1914) (1915) (1916) (1917) (1918) (1919) (1920) (1921) (1922) (1923) (1924) (1925) (1926) (1927) (1928) (1929) (1930) (1931) (1932) (1933) (1934) (1935) (1936) (1937) (1938) (1939) (1940) (1941) (1942) (1943) (1944) (1945) (1946) (1947) (1948) (1949) (1950) (1951) (1952) (1953) (1954) (1955) (1956) (1957) (1958) (1959) (1960) (1961) (1962) (1963) (1964) (1965) (1966) (1967) (1968) (1969) (1970) (1971) (1972) (1973) (1974) (1975) (1976) (1977) (1978) (1979) (1980) (1981) (1982) (1983) (1984) (1985) (1986) (1987) (1988) (1989) (1990) (1991) (1992) (1993) (1994) (1995) (1996) (1997) (1998) (1999) (2000) (2001) (2002) (2003) (2004) (2005) (2006) (2007) (2008) (2009) (2010) (2011) (2012) (2013) (2014) (2015) (2016) (2017) (2018) (2019) (2020) (2021) (2022) (2023) (2024) (2025) (2026) (2027) (2028) (2029) (2030) (2031) (2032) (2033) (2034) (2035) (2036) (2037) (2038) (2039) (2040) (2041) (2042) (2043) (2044) (2045) (2046) (2047) (2048) (2049) (2050) (2051) (2052) (2053) (2054) (2055) (2056) (2057) (2058) (2059) (2060) (2061) (2062) (2063) (2064) (2065) (2066) (2067) (2068) (2069) (2070) (2071) (2072) (2073) (2074) (2075) (2076) (2077) (2078) (2079) (2080) (2081) (2082) (2083) (2084) (2085) (2086) (2087) (2088) (2089) (2090) (2091) (2092) (2093) (2094) (2095) (2096) (2097) (2098) (2099) (2100) (2101) (2102) (2103) (2104) (2105) (2106) (2107) (2108) (2109) (2110) (2111) (2112) (2113) (2114) (2115) (2116) (2117) (2118) (2119) (2120) (2121) (2122) (2123) (2124) (2125) (2126) (2127) (2128) (2129) (2130) (2131) (2132) (2133) (2134) (2135) (2136) (2137) (2138) (2139) (2140) (2141) (2142) (2143) (2144) (2145) (2146) (2147) (2148) (2149) (2150) (2151) (2152) (2153) (2154) (2155) (2156) (2157) (2158) (2159) (2160) (2161) (2162) (2163) (2164) (2165) (2166) (2167) (2168) (2169) (2170) (2171) (2172) (2173) (2174) (2175) (2176) (2177) (2178) (2179) (2180) (2181) (2182) (2183) (2184) (2185) (2186) (2187) (2188) (2189) (2190) (2191) (2192) (2193) (2194) (2195) (2196) (2197) (2198) (2199) (2200) (2201) (2202) (2203) (2204) (2205) (2206) (2207) (2208) (2209) (2210) (2211) (2212) (2213) (2214) (2215) (2216) (2217) (2218) (2219) (2220) (2221) (2222) (2223) (2224) (2225) (2226) (2227) (2228) (2229) (2230) (2231) (2232) (2233) (2234) (2235) (2236) (2237) (2238) (2239) (2240) (2241) (2242) (2243) (2244) (2245) (2246) (2247) (2248) (2249) (2250) (2251) (2252) (2253) (2254) (2255) (2256) (2257) (2258) (2259) (2260) (2261) (2262) (2263) (2264) (2265) (2266) (2267) (2268) (2269) (2270) (2271) (2272) (2273) (2274) (2275) (2276) (2277) (2278) (2279) (2280) (2281) (2282) (2283) (2284) (2285) (2286) (2287) (2288) (2289) (2290) (2291) (2292) (2293) (2294) (2295) (2296) (2297) (2298) (2299) (2300) (2301) (2302) (2303) (2304) (2305) (2306) (2307) (2308) (2309) (2310) (2311) (2312) (2313) (2314) (2315) (2316) (2317) (2318) (2319) (2320) (2321) (2322) (2323) (2324) (2325) (2326) (2327) (2328) (2329) (2330) (2331) (2332) (2333) (2334) (2335) (2336) (2337) (2338) (2339) (2340) (2341) (2342) (2343) (2344) (2345) (2346) (2347) (2348) (2349) (2350) (2351) (2352) (2353) (2354) (2355) (2356) (2357) (2358) (2359) (2360) (2361) (2362) (2363) (2364) (2365) (2366) (2367) (2368) (2369) (2370) (2371) (2372) (2373) (2374) (2375) (2376) (2377) (2378) (2379) (2380) (2381) (2382) (2383) (2384) (2385) (2386) (2387) (2388) (2389) (2390) (2391) (2392) (2393) (2394) (2395) (2396) (2397) (2398) (2399) (2400) (2401) (2402) (2403) (2404) (2405) (2406) (2407) (2408) (2409) (2410) (2411) (2412) (2413) (2414) (2415) (2416) (2417) (2418) (2419) (2420) (2421) (2422) (2423) (2424) (2425) (2426) (2427) (2428) (2429) (2430) (2431) (2432) (2433) (2434) (2435) (2436) (2437) (2438) (2439) (2440) (2441) (2442) (2443) (2444) (2445) (2446) (2447) (2448) (2449) (2450) (2451) (2452) (2453) (2454) (2455) (2456) (2457) (2458) (2459) (2460) (2461) (2462) (2463) (2464) (2465) (2466) (2467) (2468) (2469) (2470) (2471) (2472) (2473) (2474) (2475) (2476) (2477) (2478) (2479) (2480) (2481) (2482) (2483) (2484) (2485) (2486) (2487) (2488) (2489) (2490) (2491) (2492) (2493) (2494) (2495) (2496) (2497) (2498) (2499) (2500) (2501) (2502) (2503) (2504) (2505) (2506) (2507) (2508) (2509) (2510) (2511) (2512) (2513) (2514) (2515) (2516) (2517) (2518) (2519) (2520) (2521) (2522) (2523) (2524) (2525) (2526) (2527) (2528) (2529) (2530) (2531) (2532) (2533) (2534) (2535) (2536) (2537) (2538) (2539) (2540) (2541) (2542) (2543) (2544) (2545) (2546) (2547) (2548) (2549) (2550) (2551) (2552) (2553) (2554) (2555) (2556) (2557) (2558) (2559) (2560) (2561) (2562) (2563) (2564) (2565) (2566) (2567) (2568) (2569) (2570) (2571) (2572) (2573) (2574) (2575) (2576) (2577) (2578) (2579) (2580) (2581) (2582) (2583) (2584) (2585) (2586) (2587) (2588) (2589) (2590) (2591) (2592) (2593) (2594) (2595) (2596) (2597) (2598) (2599) (2600) (2601) (2602) (2603) (2604) (2605) (2606) (2607) (2608) (2609) (2610) (2611) (2612) (2613) (2614) (2615) (2616) (2617) (2618) (2619) (2620) (2621) (2622) (2623) (2624) (2625) (2626) (2627) (2628) (2629) (2630) (2631) (2632) (2633) (2634) (2635) (2636) (2637) (2638) (2639) (2640) (2641) (2642) (2643) (2644) (2645) (2646) (2647) (2648) (2649) (2650) (2651) (2652) (2653) (2654) (2655) (2656) (2657) (2658) (2659) (2660) (2661) (2662) (2663) (2664) (2665) (2666) (2667) (2668) (2669) (2670) (2671) (2672) (2673) (2674) (2675) (2676) (2677) (2678) (2679) (2680) (2681) (2682) (2683) (2684) (2685) (2686) (2687) (2688) (2689) (2690) (2691) (2692) (2693) (2694) (2695) (2696) (2697) (2698) (2699) (2700) (2701) (2702) (2703) (2704) (2705) (2706) (2707) (2708) (2709) (2710) (2711) (2712) (2713) (2714) (2715) (2716) (2717) (2718) (2719) (2720) (2721) (2722) (2723) (2724) (2725) (2726) (2727) (2728) (2729) (2730) (2731) (2732) (2733) (2734) (2735) (2736) (2737) (2738) (2739) (2740) (2741) (2742) (2743) (2744) (2745) (2746) (2747) (2748) (2749) (2750) (2751) (2752) (2753) (2754) (2755) (2756) (2757) (2758) (2759) (2760) (2761) (2762) (2763) (2764) (2765) (2766) (2767) (2768) (2769) (2770) (2771) (2772) (2773) (2774) (2775) (2776) (2777) (2778) (2779) (2780) (2781) (2782) (2783) (2784) (2785) (2786) (2787) (2788) (2789) (2790) (2791) (2792) (2793) (2794) (2795) (2796) (2797) (2798) (2799) (2800) (2801) (2802) (2803) (2804) (2805) (2806) (2807) (2808) (2809) (2810) (2811) (2812) (2813) (2814) (2815) (2816) (2817) (2818) (2819) (2820) (2821) (2822) (2823) (2824) (2825) (2826) (2827) (2828) (2829) (2830) (2831) (2832) (2833) (2834) (2835) (2836) (2837) (2838) (2839) (2840) (2841) (2842) (2843) (2844) (2845) (2846) (2847) (2848) (2849) (2850) (2851) (2852) (2853) (2854) (2855) (2856) (2857) (2858) (2859) (2860) (2861) (2862) (2863) (2864) (2865) (2866) (2867) (2868) (2869) (2870) (2871) (2872) (2873) (2874) (2875) (2876) (2877) (2878) (2879) (2880) (2881) (2882) (2883) (2884) (2885) (2886) (2887) (2888) (2889) (2890) (2891) (2892) (2893) (2894) (2895) (2896) (2897) (2898) (2899) (2900) (2901) (2902) (2903) (2904) (2905) (2906) (2907) (2908) (2909) (2910) (2911) (2912) (2913) (2914) (2915) (2916) (2917) (2918) (2919) (2920) (2921) (2922) (2923) (2924) (2925) (2926) (2927) (2928) (2929) (2930) (2931) (2932) (2933) (2934) (2935) (2936) (2937) (2938) (2939) (2940) (2941) (2942) (2943) (2944) (2945) (2946) (2947) (2948) (2949) (2950) (2951) (2952) (2953) (2954) (2955) (2956) (2957) (2958) (2959) (2960) (2961) (2962) (2963) (2964) (2965) (2966) (2967) (2968) (2969) (2970) (2971) (2972) (2973) (2974) (2975) (2976) (2977) (2978) (2979) (2980) (2981) (2982) (2983) (2984) (2985) (2986) (2987) (2988) (2989) (2990) (2991) (2992) (2993) (2994) (2995) (2996) (2997) (2998) (2999) (3000) (3001) (3002) (3003) (3004) (3005) (3006) (3007) (3008) (3009) (3010) (3011) (3012) (3013) (3014) (3015) (3016) (3017) (3018) (3019) (3020) (3021) (3022) (3023) (3024) (3025) (3026) (3027) (3028) (3029) (3030) (3031) (3032) (3033) (3034) (3035) (3036) (3037) (3038) (3039) (3040) (3041) (3042) (3043) (3044) (3045) (3046) (3047) (3048) (3049) (3050) (3051) (3052) (3053) (3054) (3055) (3056) (3057) (3058) (3059) (3060) (3061) (3062) (3063) (3064) (3065) (3066) (3067) (3068) (3069) (3070) (3071) (3072) (3073) (3074) (3075) (3076) (3077) (3078) (3079) (3080) (3081) (3082) (3083) (3084) (3085) (3086) (3087) (3088) (3089) (3090) (3091) (3092) (3093) (3094) (3095) (3096) (3097) (3098) (3099) (3100) (3101) (3102) (3103) (3104) (3105) (3106) (3107) (3108) (3109) (3110) (3111) (3112) (3113) (3114) (3115) (3116) (3117) (3118) (3119) (3120) (3121) (3122) (3123) (3124) (3125) (3126) (3127) (3128) (3129) (3130) (3131) (3132) (3133) (3134) (3135) (3136) (3137) (3138) (3139) (3140) (3141) (3142) (3143) (3144) (3145) (3146) (3147) (3148) (3149) (3150) (3151) (3152) (3153) (3154) (3155) (3156) (3157) (3158) (3159) (3160) (3161) (3162) (3163) (3164) (3165) (3166) (3167) (3168) (3169) (3170) (3171) (3172) (3173) (3174) (3175) (3176) (3177) (3178) (3179) (3180) (3181) (3182) (3183) (3184) (3185) (3186) (3187) (3188) (3189) (3190) (3191) (3192) (3193) (3194) (3195) (3196) (3197) (3198) (3199) (3200) (3201) (3202) (3203) (3204) (3205) (3206) (3207) (3208) (3209) (3210) (3211) (3212) (3213) (3214) (3215) (3216) (3217) (3218) (3219) (3220) (3221) (3222) (3223) (3224) (3225) (3226) (3227) (3228) (3229) (3230) (3231) (3232) (3233) (3234) (3235) (3236) (3237) (3238) (3239) (3240) (3241) (3242) (3243) (3244) (3245) (3246) (3247) (3248) (3249) (3250) (3251) (3252) (3253) (3254) (3255) (3256) (3257) (3258) (3259) (3260) (3261) (3262) (3263) (3264) (3265) (3266) (3267) (3268) (3269) (3270) (3271) (3272) (3273) (3274) (3275) (3276) (3277) (3278) (3279) (3280) (3281) (3282) (3283) (3284) (3285) (3286) (3287) (3288) (3289) (3290) (3291) (3292) (3293) (3294) (3295) (3296) (3297) (3298) (3299) (3300) (3301) (3302) (3303) (3304) (3305) (3306) (3307) (3308) (3309) (3310) (3311) (3312) (3313) (3314) (3315) (3316) (3317) (3318) (3319) (3320) (3321) (3322) (3323) (3324) (3325) (3326) (3327) (3328) (3329) (3330) (3331) (3332) (3333) (3334) (3335) (3336) (3337) (3338) (3339) (3340) (3341) (3342) (3343) (3344) (3345) (3346) (3347) (3348) (3349) (3350) (3351) (3352) (3353) (3354) (3355) (3356) (3357) (3358) (3359) (3360) (3361) (3362) (3363) (3364) (3365) (3366) (3367) (3368) (3369) (3370) (3371) (3372) (3373) (3374) (3375) (3376) (3377) (3378) (3379) (3380) (3381) (3382) (3383) (3384) (3385) (3386) (3387) (3388) (3389) (3390) (3391) (3392) (3393) (3394) (3395) (3396) (3397) (3398) (3399) (3400) (3401) (3402) (3403) (3404) (3405) (3406) (3407) (3408) (3409) (3410) (3411) (3412) (3413) (3414) (3415) (3416) (3417) (3418) (3419) (3420) (3421) (3422) (3423) (3424) (3425) (3426) (3427) (3428) (3429) (3430) (3431) (3432) (3433) (3434) (3435) (3436) (3437) (3438) (3439) (3440) (3441) (3442) (3443) (3444) (3445) (3446) (3447) (3448) (3449) (3450) (3451) (3452) (3453) (3454) (3455) (3456) (3457) (3458) (3459) (3460) (3461) (3462) (3463) (3464) (3465) (3466) (3467) (3468) (3469) (3470) (3471) (3472) (3473) (3474) (3475) (3476) (3477) (3478) (3479) (3480) (3481) (3482) (3483) (3484) (3485) (3486) (3487) (3488) (3489) (3490) (3491) (3492) (3493) (3494) (3495) (3496) (3497) (3498) (3499) (3500) (3501) (3502) (3503) (3504) (3505) (3506) (3507) (3508) (3509) (3510) (3511) (3512) (3513) (3514) (3515) (3516) (3517) (3518) (3519) (3520) (3521) (3522) (3523) (3524) (3525) (3526) (3527) (3528) (3529) (3530) (3531) (3532) (3533) (3534) (3535) (3536) (3537) (3538) (3539) (3540) (3541) (3542) (3543) (3544) (3545) (3546) (3547) (3548) (3549) (3550) (3551) (3552) (3553) (3554) (3555) (3556) (3557) (3558) (3559) (3560) (3561) (3562) (3563) (3564) (3565) (3566) (3567) (3568) (3569) (3570) (3571) (3572) (3573) (3574) (3575) (3576) (3577) (3578) (3579) (3580) (3581) (3582) (3583) (3584) (3585) (3586) (3587) (3588) (3589) (3590) (3591) (3592) (3593) (3594) (3595) (3596) (3597) (3598) (3599) (3600) (3601) (3602) (3603) (3604) (3605) (3606) (3607) (3608) (3609) (3610) (3611) (3612) (3613) (3614) (3615) (3616) (3617) (3618) (3619) (3620) (3621) (3622) (3623) (3624) (3625) (3626) (3627) (3628) (3629) (3630) (3631) (3632) (3633) (3634) (3635) (3636) (3637) (3638) (3639) (3640) (3641) (3642) (3643) (3644) (3645) (3646) (3647) (3648) (3649) (3650) (3651) (3652) (3653) (3654) (3655) (3656) (3657) (3658) (3659) (3660) (3661) (3662) (3663) (3664) (3665) (3666) (3667) (3668) (3669) (3670) (3671) (3672) (3673) (3674) (3675) (3676) (3677) (3678) (3679) (3680) (3681) (3682) (3683) (3684) (3685) (3686) (3687) (3688) (3689) (3690) (3691) (3692) (3693) (3694) (3695) (3696) (3697) (3698) (3699) (3700) (3701) (3702) (3703) (3704) (3705) (3706) (3707) (3708) (3709) (3710) (3711) (3712) (3713) (3714) (3715) (3716) (3717) (3718) (3719) (3720) (3721) (3722) (3723) (3724) (3725) (3726) (3727) (3728) (3729) (3730) (3731) (3732) (3733) (3734) (3735) (3736) (3737) (3738) (3739) (3740) (3741) (3742) (3743) (3744) (3745) (3746) (3747) (3748) (3749) (3750) (3751) (3752) (3753) (3754) (3755) (3756) (3757) (3758) (3759) (3760) (3761) (3762) (3763) (3764) (3765) (3766) (3767) (3768) (3769) (3770) (3771) (3772) (3773) (3774) (3775) (3776) (3777) (3778) (3779) (3780) (3781) (3782) (3783) (3784) (3785) (3786) (3787) (3788) (3789) (3790) (3791) (3792) (3793) (3794) (3795) (3796) (3797) (3798) (3799) (3800) (3801) (3802) (3803) (3804) (3805) (3806) (3807) (3808) (3809) (3810) (3811) (3812) (3813) (3814) (3815) (3816) (3817) (3818) (3819) (3820) (3821) (3822) (3823) (3824) (3825) (3826) (3827) (3828) (3829) (3830) (3831) (3832) (3833) (3834) (3835) (3836) (3837) (3838) (3839) (3840) (3841) (3842) (3843) (3844) (3845) (3846) (3847) (3848) (3849) (3850) (3851) (3852) (3853) (3854) (3855) (3856) (3857) (3858) (3859) (3860) (3861) (3862) (3863) (3864) (3865) (3866) (3867) (3868) (3869) (3870) (3871) (3872) (3873) (3874) (3875) (3876) (3877) (3878) (3879) (3880) (3881) (3882) (3883) (3884) (3885) (3886) (3887) (3888) (3889) (3890) (3891) (3892) (3893) (3894) (3895) (3896) (3897) (3898) (3899) (3900) (3901) (3902) (3903) (3904) (3905) (3906) (3907) (3908) (3909) (3910) (3911) (3912) (3913) (391

4. *Der elektrische Widerstand loser Kontakte und Resonanzversuche mit dem Kohärer; von Philip Ely Robinson.*

(Auszug aus der Gießener Inaugural-Dissertation.)

Die folgende Untersuchung wurde angestellt, um zu einer besseren Kenntnis der Kohärerwirkung zu gelangen. Sie hat ihren Ausgangspunkt in den Arbeiten von Guthe und Trowbridge.¹⁾ Diese haben gefunden: „1. Die Potentialdifferenz besitzt an den Enden des Kohärrers bei genügender Stromstärke einen konstanten Wert, welcher von einer weiteren Steigerung des Stromes oder einer Änderung der angelegten elektromotorischen Kraft unabhängig ist, für verschiedene Metalle jedoch verschiedene Werte hat. Für mehrere Kontakte ist dieselbe der Zahl derselben proportional. 2. Bei Anwendung einer elektromotorischen Kraft, die kleiner als diese Potentialdifferenz ist, tritt keine Kohärerwirkung ein. Dieser Wert wurde daher die kritische Potentialdifferenz genannt.“²⁾ Diese Ergebnisse wurden zunächst einer Untersuchung unterzogen.

Abschnitt I. Der Widerstand loser Kontakte.

A. Untersuchung mittels eines Gleichstromes.

Versuchsanordnung.

Gebraucht wurde ein einfacher, aus einer einzigen Kontaktstelle bestehender Kohärer, der durch zwei an Seidenfäden

1) A. Trowbridge, Amer. Journ. of. Sc. 8. p. 199. 1899; K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. 11. p. 22. 1900; K. E. Guthe, Ann. d. Phys. 4. p. 762. 1901.

2) K. E. Guthe, Ann. d. Phys. 4. p. 767. 1901.

schwebenden Metallstäbchen (vgl. Fig. 1) gebildet war. Ein festes hölzernes Gestell war auf einer schweren eisernen Platte P befestigt und trug auf einem Brett oben zwei mit Blei belastete Holzklötze C_1 und C_2 . An jedem Klotze wurde ein Stäbchen durch vier Fäden gehalten. Diese wurden oben an Haken befestigt, die in den Holzklötz eingeschraubt waren, und unten mit zwei Ringen aus Hartgummi verbunden, die fest an dem Stäbchen saßen. Die Stäbchen $s_1 s_1'$ und $s_2 s_2'$ waren je 6 cm lang und von 6 mm Durchmesser. Die Enden s_1 und s_2 , die zusammen kamen, und die hiernach kurzweg als die Kohärerenden bezeichnet werden, waren kugel-

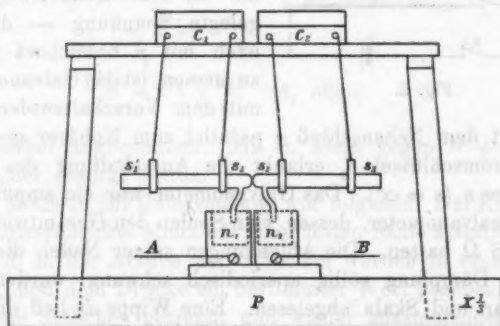


Fig. 1.

förmig abgerundet. Durch Drehen der Haken konnte man die Fäden verlängern oder verkürzen, und hatte dadurch ein Mittel, die Achsen der Stäbchen in dieselbe Linie zu bringen. Durch Verschiebung der Klötze C_1 und C_2 war es möglich den Druck, womit die Stäbchen gegeneinander preßten, zu variieren. Dicht an den Kohärerenden s_1 und s_2 waren zwei kleine Metallstifte in die Stäbchen eingesetzt, die unten in zwei isolierte, mit Quecksilber gefüllte Näpfe n_1 und n_2 eintauchten. Durch die Drähte A und B , die in Verbindung mit den Näpfchen standen, war es dann möglich einen Strom durch die Kontaktstelle zu schicken, und deren Widerstand zu messen.

Die gebrauchte Schaltung ist in der nachstehenden Fig. 2 angegeben. Der Kohärer befindet sich bei c . Ein Akku-

mulator e und die Widerstände w_2 und W sind in Reihe mit dem Kohärer geschaltet. Durch Variieren von w_2 und W kann man die Spannung, die an den Kohärerenden angelegt wird, beliebig ändern. Um bequem dieser angelegten Spannung

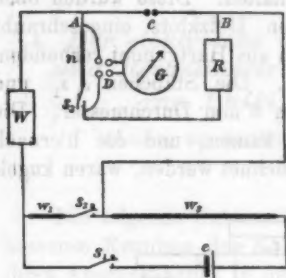


Fig. 2.

kleine Werte zu geben, ist der kleine Widerstand w_1 vorhanden, der durch Schließen vom Stromschlüssel s_2 und durch Variieren von w_2 erlaubt, jeden beliebigen Bruchteil der Spannung e des Akkumulators abzuzweigen. Um die an den Kohärerenden angelegte Spannung — die hier nach mit p bezeichnet wird — zu messen, ist das Galvanometer G mit dem Vorschaltwiderstand R

und mit dem Nebenschluß n parallel zum Kohärer geschaltet. Ein Stromschlüssel s_3 erlaubt die Ausschaltung des Nebenschlusses n ($n = \infty$). Das Galvanometer war ein empfindliches Spiegelgalvanometer, dessen vier Spulen den Gesamtwiderstand von 118Ω hatten. Die Ablenkungen seiner Nadel, die wegen starker Dämpfung völlig aperiodisch schwang, wurden durch Fernrohr und Skala abgelesen. Eine Wippe D ließ die Richtung des Stromes durch das Galvanometer umkehren. Bei jeder Messung wurde der Strom durch das Galvanometer umgekehrt, und das Mittel der Ablenkungen nach beiden Seiten genommen. Das Galvanometer wurde als Voltmeter benutzt, seine Ablenkungen waren geeicht.¹⁾

Untersuchungsmethode.

Die Methode der Messung des Kohärerwiderstandes war folgende: Zu Anfang wurde die Spannung e des Akkumulators gefunden, indem ein bestimmter Bruchteil davon gemessen wurde. Diese Messung wurde gewöhnlich zwei- oder dreimal täglich gemacht. Den Kohärer schaltete man nun ein, und, um eine gewisse Spannung an seine Enden anzulegen, gab man, falls s_2

1) Vgl. das Nähere die Dissertation.

geschlossen war, w_1 und w_2 passende Werte, während W einen bestimmten Wert hatte, oder falls S_2 offen war, variierte man w_2 und W . Die angelegte Spannung p ergab sich dann aus dem Ausschlage des Galvanometers. Bedeutet nun w' den Gesamtwiderstand zwischen A und B , und γ den Widerstand des Galvanometerzweiges, so ist c , der Kohärerwiderstand, gegeben durch:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{w'} - \frac{1}{\gamma}}$$

wo

$$w' = \frac{W p}{e \frac{w_1}{w_1 + w_2} - p} \quad (S_2 \text{ geschlossen})$$

oder

$$w' = \frac{(w_2 + W) p}{e - p} \quad (S_2 \text{ offen}).$$

Es ist hierbei angenommen, daß w_1 klein gegen $W + w'$ ist, wofür immer gesorgt wurde.

Die Methode der Untersuchung war folgende: Der Kohärer, der erschütterungsfrei allein auf einer festen Säule stand, wurde justiert, d. h. die Achsen der Stäbchen wurden in eine Linie gebracht, und dem Drucke ein bestimmter Wert gegeben. Nun wurden die Stäbchen getrennt und wieder zusammengebracht, und dann der Widerstand des Kohärsers, d. h. der Kontaktstelle, bei sehr kleiner angelegter elektromotorischer Kraft p_0 , etwa 0,01 Volt, gemessen. Dieser zuerst gefundene Wert wird der Anfangswiderstand genannt und soll mit c_0 bezeichnet werden. Die angelegte Spannung wurde nach und nach vergrößert, und die entsprechenden Werte des Kohärerwiderstandes gemessen; dies wurde solange fortgesetzt, bis der Kohärerwiderstand auf einen ganz minimalen Wert sank. Es erwies sich als vorteilhaft, Messungen in folgender Reihenfolge zu machen: Wird die nach und nach steigende Spannung mit $p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$ bezeichnet, so wurde der Kohärerwiderstand zunächst bei der Spannung p_0 (Anfangswiderstand) gemessen, dann mit p_1 , dann wieder mit p_0 , dann mit p_2 , wieder mit p_0 , dann mit p_3 , wieder mit p_0 , dann mit der nächst höheren Spannung, und so weiter, bis der Kohärerwiderstand auf einen ganz minimalen Wert sank.

Resultate mit einem Kohärer von Stahl. Die angegebenen Größen.

Zunächst wurde ein Kohärer, der aus Stahlstäbchen bestand, untersucht. Über den Zustand der Kontaktflächen soll hier nur bemerkt werden, daß sie spiegelglatt waren. Von den verschiedenen Reihen, die gemacht wurden, gebe ich hier

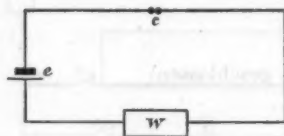


Fig. 3.

vier an, die die Ergebnisse im wesentlichen darstellen. Es stellt sich heraus, daß der Kohärerwiderstand unter Umständen von den anderen Widerständen in dem Stromkreise abhängt. Um aber nicht genötigt zu werden, die Werte von w_1 , w_2 , W , γ und R (vgl. p. 757) jedesmal anzugeben, rechne ich die Beobachtungsdaten so um, wie sie der in nebenstehender Fig. 3 gezeichneten (ideellen) Schaltung entsprechen würden. Der Widerstand c des Kohäriers (in Ohm) und die Potentialdifferenz p an seinen Enden (in Volt) sind den Messungen entnommen. Für den äußeren Widerstand W werden aber Werte angegeben werden, die sich aus den in den Messungen vorkommenden Werten von W , w_1 , w_2 , w' (vgl. p. 757) und e , und für eine Spannung von 2,00 Volt des Akkumulators e ausrechnen lassen. Der Druck D , d. h. die Kraft, womit das eine Stäbchen gegen das andere drückte, wird im Gramm gewicht angegeben werden.¹⁾

Die angegebenen Reihen erstreckten sich über mehrere Tage, und die Pausen, die stattfanden, sind beigelegt, um zu zeigen, wie frei der Kohärer von Störungen durch Erschütterung war, und wie er sich verhält, wenn er sich selbst für längere Zeiten überlassen wird.

Die Fehlergrenze in den Messungen war wohl nicht über $\pm \frac{1}{2}$ Proz.

1) Über seine Berechnung vgl. die Dissertation.

Reihe A. $D = 1,25 \text{ g.}$

| W | p. 10 ⁴ | c | W | p. 10 ⁴ | c | W | p. 10 ⁴ | c |
|--------------------|--------------------|-------|--------------------|--------------------|-------|-------------------|--------------------|------|
| 104200 | 102 | 585,3 | 65400 | 108 | 354,1 | 285 | 2040 | 26,7 |
| 100900 | 98 | 499,7 | 686 | 3888 | 165,5 | 196 | 2080 | 22,7 |
| 10000 | 893 | 469,3 | 63200 | 104 | 331,1 | 3935 | 111 | 22,0 |
| 9660 | 554 | 430,8 | Pause: 3 Stunden | | | Pause: 2 Stunden | | |
| 95800 | 93 | 449,6 | 64100 | 105 | 338,5 | 3955 | 111 | 22,1 |
| 8830 | 1720 | 360,6 | 589 | 4142 | 153,8 | 197 | 2029 | 22,3 |
| 83900 | 103 | 434,2 | | 4064 | 150,2 | 158 | 2064 | 18,1 |
| 3440 | 1855 | 351,5 | 62800 | 103 | 325,4 | 128 | 2138 | 15,3 |
| 83000 | 102 | 425,0 | 491 | 4217 | 181,1 | 2970 | 100 | 15,0 |
| Pause: Nacht | | | 61200 | 101 | 310,6 | Pause: 12 Stunden | | |
| 80800 | 99 | 401,9 | 392 | 4582 | 116,5 | 2970 | 100 | 15,0 |
| 3440 | 1722 | 324,5 | 61500 | 102 | 314,3 | 99 | 2072 | 11,5 |
| 79700 | 97 | 388,5 | Pause: 12½ Stunden | | | 2975 | 74 | 11,1 |
| 2950 | 1916 | 312,6 | 63000 | 103 | 326,0 | 99 | 2070 | 11,5 |
| 68700 | 112 | 386,7 | 344,5 | 4841 | 110,0 | 2910 | 74 | 11,0 |
| 2460 | 2148 | 295,7 | 345,1 | 2143 | 41,4 | Pause: 70 Stunden | | |
| 66700 | 111 | 372,6 | | 6600 | 112 | 37,1 | 1990 | 110 |
| Pause: 2 Stunden | | | Pause: 2 Stunden | | | 99,5 | 2064 | 11,4 |
| 70600 | 114 | 404,9 | 6710 | 112 | 38,0 | 1990 | 107 | 10,7 |
| 2160 | 2333 | 285,0 | 294 | 2400 | 40,1 | Pause: 4 Stunden | | |
| 68000 | 112 | 382,6 | 294 | 2183 | 35,1 | 1980 | 108 | 10,7 |
| 1860 | 2516 | 268,3 | 6900 | 98 | 34,0 | 99 | 2000 | 11,0 |
| 67200 | 110 | 371,8 | 4930 | 137 | 34,0 | 1985 | 107 | 10,7 |
| 1570 | 2772 | 252,4 | 2960 | 228 | 34,0 | 99 | 1993 | 10,9 |
| 66400 | 109 | 362,6 | Pause: 17 Stunden | | | 1985 | 107 | 10,6 |
| 1270 | 3008 | 225,5 | 6920 | 98 | 34,0 | Pause: 17 Stunden | | |
| 65900 | 107 | 351,9 | 4940 | 137 | 34,0 | 1990 | 107 | 10,7 |
| Pause: 2½ Stunden. | | | 2965 | 227 | 34,1 | 50 | 2041 | 5,7 |
| 65200 | 108 | 353,3 | 1980 | 340 | 34,2 | 995 | 109 | 5,5 |
| 1077 | 3256 | 209,5 | 986 | 676 | 34,5 | 50 | 2058 | 5,7 |
| 64500 | 106 | 344,4 | 690 | 957 | 34,7 | 995 | 108 | 5,4 |
| 979 | 3388 | 199,4 | 394 | 1640 | 35,2 | 20 | 2305 | 2,6 |
| 64000 | 106 | 340,3 | 295 | 2085 | 34,4 | 399 | 123 | 2,5 |
| 881 | 3520 | 188,1 | 690 | 935 | 33,8 | Pause: 3 Stunden | | |
| 63100 | 105 | 332,2 | 986 | 660 | 33,6 | 398 | 123 | 2,5 |
| 783 | 3671 | 176,0 | 2965 | 221 | 33,2 | 20 | 2205 | 2,5 |
| 62300 | 103 | 322,9 | 6920 | 96 | 33,3 | 398 | 119 | 2,4 |
| Pause: 12 Stunden. | | | Pause: 2½ Stunden: | | | 10 | 2431 | 1,4 |
| 68400 | 111 | 381,6 | 6890 | 96 | 33,2 | 298 | 87 | 1,3 |
| 786 | 3836 | 186,6 | 981 | 661 | 33,6 | Funken | | |
| 65600 | 107 | 353,8 | 294 | 2053 | 33,6 | 199 | 126 | 1,3 |
| Pause: 3 Stunden | | | | | | Reihe abgebrochen | | |

Reihe B. $D = 1,35 \text{ g.}$

| W | $p \cdot 10^4$ | c | W | $p \cdot 10^4$ | c | W | $p \cdot 10^4$ | c |
|---------------|----------------|--------|---------------|----------------|-------|---------------|----------------|------|
| 23650 | 113 | 136,5 | 490 | 2582 | 72,7 | 2315 | 117 | 13,6 |
| 2269 | 993 | 118,1 | 20350 | 108 | 105,0 | 136 | 2216 | 17,0 |
| 23350 | 114 | 133,4 | Pause: Mittag | | | 2395 | 120 | 14,4 |
| 1093 | 1687 | 100,7 | 450 | 2814 | 73,8 | Pause: Mittag | | |
| 23200 | 113 | 132,1 | 23140 | 109 | 126,6 | 2380 | 120 | 14,3 |
| 900 | 1949 | 97,2 | 400 | 2888 | 67,6 | 116,5 | 2190 | 14,3 |
| 23050 | 112 | 129,8 | 20910 | 102 | 107,0 | 1990 | 103 | 10,3 |
| 760 | 2151 | 91,7 | 350 | 2453 | 49,0 | 97 | 2064 | 11,2 |
| 23200 | 112 | 128,8 | 16540 | 77 | 63,8 | 1200 | 120 | 7,3 |
| Pause: Mittag | | | 250 | 2323 | 32,9 | 77,5 | 2201 | 9,6 |
| 23420 | 113 | 132,7 | 8457 | 80 | 33,9 | Pause: Nacht | | |
| 700 | 2269 | 89,6 | Pause: Nacht | | | 73,0 | 2141 | 9,4 |
| 23070 | 111 | 129,2 | 5865 | 106 | 32,5 | 1080 | 110 | 6,0 |
| 547 | 2392 | 74,3 | 194,5 | 2156 | 23,5 | 58,5 | 2128 | 7,0 |
| 20640 | 101 | 105,1 | 4950 | 82 | 20,4 | 720 | 119 | 4,3 |
| Pause: Nacht | | | 165,5 | 2165 | 20,0 | 59 | 2091 | 6,9 |
| 19750 | 102 | 101,4 | 3375 | 91 | 16,4 | 700 | 117 | 4,1 |
| 437 | 2685 | 67,7 | 136 | 2248 | 17,2 | 41 | 2130 | 5,3 |
| 20420? | 103? | 106,1? | 2240 | 114 | 12,9 | 630 | 107 | 3,4 |
| | | | Pause: 2 Tage | | | Schluß. | | |

Reihe C. $D = 1,45 \text{ g.}$

| W | p. 10 ⁴ | c | W | p. 10 ⁴ | c | W | p. 10 ⁴ | c |
|---|--------------------|------|------------------|--------------------|------|--------------------|--------------------|------|
| 9760 | 122 | 59,6 | 9820 | 113 | 55,8 | 3900 | 84 | 16,8 |
| 232 | 2313 | 38,0 | 176 | 3212 | 33,6 | 97,4 | 2293 | 12,6 |
| 9800 | 117 | 57,7 | 166 | 3306 | 32,8 | 1950 | 120 | 11,8 |
| 233 | 2791 | 37,6 | 156 | 3401 | 32,0 | Pause: 13 Stunden | | |
| 9770 | 115 | 56,5 | 9840 | 109 | 54,0 | 1960 | 121 | 11,9 |
| 222 | 2639 | 36,8 | Pause: 8 Stunden | | | 97,7 | 2091 | 11,4 |
| 9770 | 115 | 56,5 | 9855 | 110 | 54,5 | 58,8 | 1992 | 6,5 |
| 213 | 2905 | 36,2 | 155,5 | 3343 | 31,2 | 983 | 101 | 5,0 |
| 208 | 2966 | 35,4 | 145,5 | 3437 | 30,2 | Pause: 8 Stunden | | |
| 194 | 3040 | 34,7 | 136,0 | 3545 | 29,3 | 978 | 101 | 5,0 |
| 9800 | 112 | 55,2 | | ↓ | | 49,2 | 2042 | 5,6 |
| 193 | 3028 | 34,5 | 136,0 | 2496 | 19,4 | 978 | 82 | 4,0 |
| 184 | 3102 | 33,7 | 8795 | 52 | 22,9 | Durch Funken nicht | | |
| 174 | 3180 | 32,9 | 137 | 2437 | 18,9 | geändert. | | |
| 9775 | 112 | 54,8 | 126 | 2581 | 18,7 | 29,2 | 2143 | 8,5 |
| Pause: 12 ¹ / ₂ Stunden | | | 117 | 2419 | 17,4 | Reihe abgebrochen. | | |
| | | | | 2453 | 16,3 | | | |

Reihe D. $D = 1,77$ g.

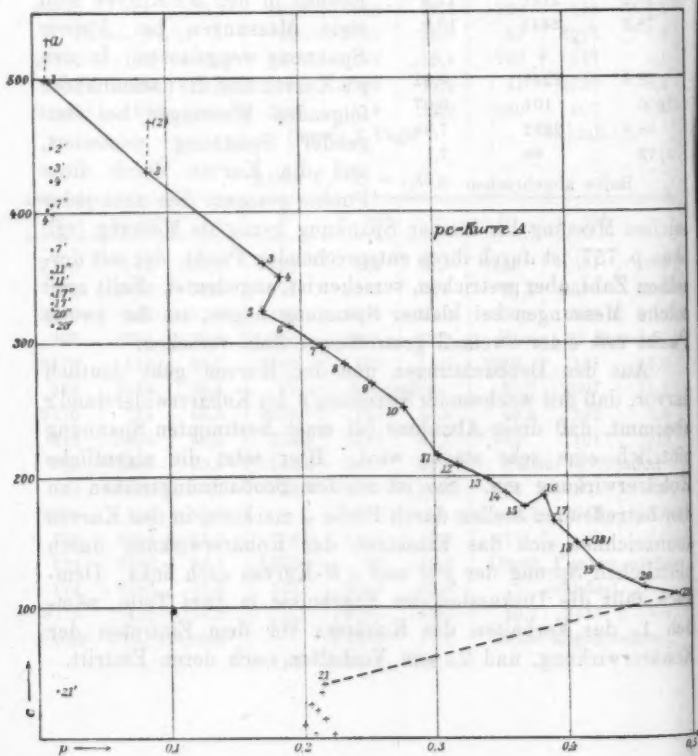
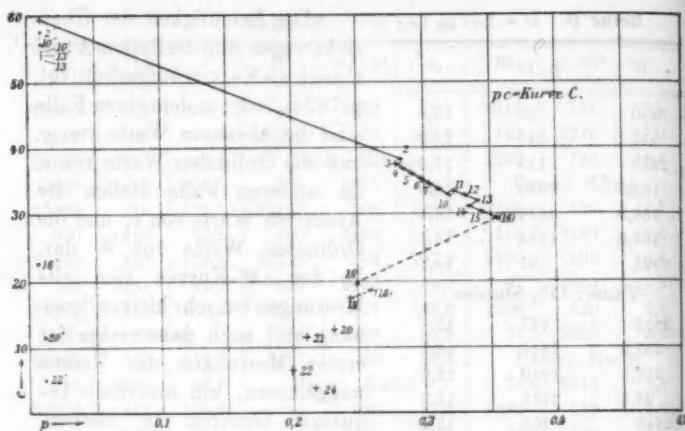
| W | $p \cdot 10^4$ | c |
|--------------------------------|----------------|------|
| 3850 | 89 | 17,6 |
| 977 | 348 | 17,3 |
| 2940 | 115 | 17,0 |
| 165,5 | 1643 | 14,8 |
| 156,5 | 1686 | 14,4 |
| 137,0 | 1794 | 13,5 |
| 2925 | 97 | 14,3 |
| Pause: $13\frac{1}{2}$ Stunden | | |
| 2455 | 127 | 15,7 |
| 137,5 | 1811 | 13,7 |
| 117,5 | 1980 | 12,9 |
| 98,2 | 2161 | 11,9 |
| 2446 | 103 | 12,6 |
| 98,2 | 2161 | 11,9 |
| 78,3 | 2443 | 10,9 |
| | ↓ | |
| 78,3 | 2248 | 9,92 |
| 1970 | 101 | 9,97 |
| 58,9 | 2232 | 7,38 |
| 1472 | 96 | 7,1 |

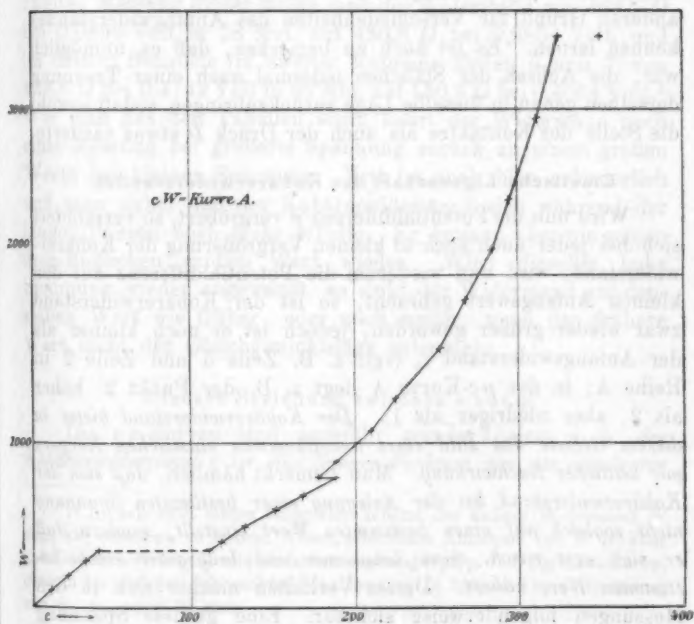
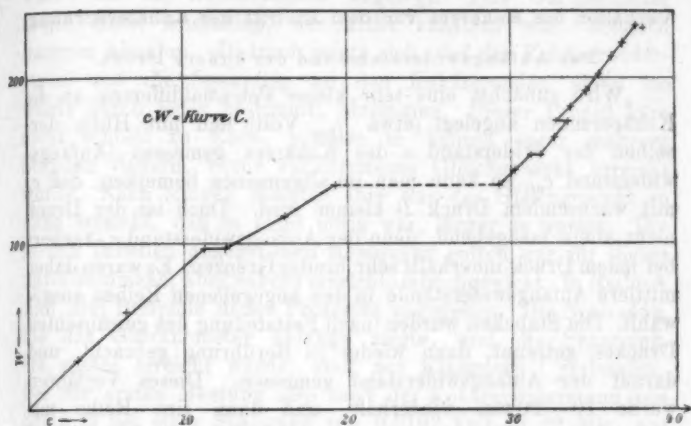
Reihe abgebrochen.

Der Leichtigkeit der Übersicht wegen sind die Reihen A und C auch als Kurven aufgestellt (vgl. p. 762 u. 763); in dem einen Falle sind die Abszissen Werte von p , und die Ordinaten Werte von c , im anderen Falle stellen die Abszissen Werte von c , und die Ordinaten Werte von W dar. In den cW -Kurven sind alle Messungen bei sehr kleiner Spannung und noch dazu einige der ersten Messungen der Reihen weggelassen, um innerhalb bequemer Grenzen zu bleiben. Ebenso in den $p c$ -Kurven sind viele Messungen bei kleiner Spannung weggelassen. In den $p c$ -Kurven sind die nacheinander folgenden Messungen bei steigender Spannung numeriert, und die Kurven durch diese Punkte gezogen. Die nach jeder

solchen Messung bei kleiner Spannung gemachte Messung (vgl. oben p. 757) ist durch ihren entsprechenden Punkt, der mit derselben Zahl, aber gestrichen, versehen ist, angedeutet. Falls zwei solche Messungen bei kleiner Spannung folgen, ist der zweite Punkt mit einer zweimal gestrichenen Zahl versehen.

Aus den Beobachtungen und den Kurven geht deutlich hervor, daß mit wachsender Spannung p der Kohärerwiderstand c abnimmt, daß diese Abnahme bei einer bestimmten Spannung plötzlich eine sehr starke wird. Hier setzt die eigentliche Kohärerwirkung ein. Sie ist in den Beobachtungsreihen an den betreffenden Stellen durch Pfeile ↓ markiert, in den Kurven kennzeichnet sich das Einsetzen der Kohärerwirkung durch plötzlichen Sprung der $p c$ - und cW -Kurven nach links. Demnach fällt die Diskussion der Ergebnisse in zwei Teile, nämlich 1. das Verhalten des Kohälers vor dem Eintreten der Kohärerwirkung, und 2. sein Verhalten nach deren Eintritt.





Verhalten des Kohärrers vor dem Eintritt der Kohärrerwirkung.

Der Anfangswiderstand und der äußere Druck.

Wird zunächst eine sehr kleine Potentialdifferenz an die Kohärrerenden angelegt (etwa $\frac{1}{100}$ Volt) und mit Hilfe derselben der Widerstand c des Kohärrers gemessen (Anfangswiderstand c_0), so kann man im allgemeinen bemerken, daß c_0 mit wachsendem Druck D kleiner wird. Doch ist der Druck nicht allein maßgebend, denn der Anfangswiderstand c_0 variiert bei jedem Druck innerhalb sehr breiter Grenzen. Es waren daher mittlere Anfangswiderstände in den angegebenen Reihen ausgewählt. Die Stäbchen wurden (nach Feststellung des gewünschten Druckes) getrennt, dann wieder in Berührung gebracht, und darauf der Anfangswiderstand gemessen. Dieses Verfahren wurde 10—20 mal wiederholt, und dann eine Reihe mit einem Anfangswiderstand angefangen, der ungefähr dem Mittel dieser Messungen entsprach. Wir werden später einen anderen Grund für Verschiedenheiten des Anfangswiderstandes kennen lernen. Es ist auch zu bemerken, daß es unmöglich war, die Achsen der Stäbchen jedesmal nach einer Trennung derselben genau in dieselbe Lage zurückzubringen, sodaß sowohl die Stelle des Kontaktes als auch der Druck D etwas variierte.

Elastische Eigenschaft des Kohärrerwiderstandes.

Wird nun die Potentialdifferenz p vergrößert, so vermindert sich bei jeder auch noch so kleinen Vergrößerung der Kohärrerwiderstand; wird nun wiederum die Potentialdifferenz auf den kleinen Anfangswert gebracht, so ist der Kohärrerwiderstand zwar wieder größer geworden, jedoch ist er noch kleiner als der Anfangswiderstand c_0 (vgl. z. B. Zeile 5 und Zeile 2 in Reihe A; in der p - c -Kurve A liegt z. B. der Punkt 2' höher als 2, aber niedriger als 1). *Der Kohärrerwiderstand bietet in diesem Gebiete das Bild eines unvollkommen elastischen Körpers mit zeitlicher Nachwirkung.* Man bemerkt nämlich, daß sich der Kohärrerwiderstand bei der Anlegung einer bestimmten Spannung nicht sogleich auf einen bestimmten Wert einstellt, sondern daß er sich erst *rasch*, dann *langsamer und langsamer* einem bestimmten Wert nähert. Dieses Verhalten machte sich in den Messungen folgenderweise sichtbar. Eine gewisse Spannung

wurde an die Kohärerenden angelegt. Das Galvanometer zeigte einen Ausschlag, der nicht konstant war, sondern langsam abnahm. Dadurch zeigte sich, daß der Kohärerwiderstand und die Spannung an den Kohärerenden (denn sie wurde durch jenen bestimmt), abnahmen. Dieser Prozeß kam nicht schnell zu Ende, sondern er konnte sogar mehrere Stunden dauern, bevor vollkommenes Gleichgewicht erreicht wurde. Nach einigen Minuten aber war das Gleichgewicht so nahe erreicht, daß es nicht nötig war, länger zu warten. Die in den Tabellen angegebenen Messungen gelten nur für dieses unvollkommene, aber nahezu erreichte Gleichgewicht. In Reihe A sind drei Beispiele dieses Prozesses angegeben. Die Spannung, die das Galvanometer anfangs zeigte, und die Spannung, die später erreicht wurde, sind mit Klammern { verbunden. Bei der ersten Messung also sank der Kohärerwiderstand von $535,3 \, \Omega$ bei einer Spannung von $0,0102$ Volt in 22 Min. auf $499,7 \, \Omega$ ($= c_0$) bei einer Spannung von $0,0098$ Volt. Bei der zweiten Messung dieser Reihe sank der Widerstand von $469,3 \, \Omega$ bei $0,0893$ Volt in 28 Min. auf $430,8 \, \Omega$ bei $0,0854$ Volt, und im dritten Beispiele (in zweiter Kolumne Zeilen 6 und 7) von $153,8 \, \Omega$ bei $0,4142$ Volt in 30 Min. auf $150,2 \, \Omega$ bei $0,4064$ Volt.¹⁾ Wie man aus den Tabellen sieht, kehrt der Widerstand nach einer Messung bei größerer Spannung zurück zu einem großen Werte bei kleiner Spannung. Zeit ist auch hier erforderlich und man sieht, daß der Kohärerwiderstand sich während der langen Pausen noch mehr erholte. Er gewann aber nie seinen ursprünglichen großen Wert wieder. Wird dieselbe hohe Spannung wieder angewandt, so sinkt der Widerstand auf denselben Wert wie früher, oder noch weiter, wenn der frühere Wert nicht der Gleichgewichtslage entsprach.

Lineare Beziehung zwischen c und p .

Die p - c -Kurven sind ungefähr gerade Linien, d. h. der Kohärerwiderstand c ist eine lineare Funktion von der angelegten

1) In den zwei ersten Beispielen scheint der äußere Widerstand W auch abgenommen zu haben. Diese scheinbare Abnahme von W ist aber auf die Umrechnung für die einfache Schaltung (vgl. p. 758) zurückzuführen, denn in der wirklich gebrauchten Schaltung (vgl. p. 755) fand keine Änderung von w_1, w_2 , oder W statt.

Spannung p. Von den *p c*-Kurven wurden die wahrscheinlichsten Lagen dieser Geraden angenommen, und ihre Gleichungen in der Form

$$\frac{p}{a} + \frac{c}{b} = 1$$

ausgerechnet. Es bedeutet *a* also die Spannung, die, an die Kohärenden angelegt, den Kohärerwiderstand *c* auf den Wert Null bringen würde, falls Kohärerwirkung nicht einträte, *b* dagegen den Anfangswiderstand bei unendlich kleiner Spannung. Die folgende Tabelle bietet einen Überblick über die Resultate dar. In der ersten Kolonne ist der äußere Druck *D*, in der zweiten und dritten die Werte von *a* und *b*, in der vierten der Anfangswiderstand *c*₀ angegeben und zuletzt folgen Bemerkungen über die Deutlichkeit der linearen Beziehung in den betreffenden Reihen.

| <i>D</i> | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> ₀ | Bemerkungen |
|----------|----------|----------|-----------------------|----------------|
| 1,25 g | 0,674 | 506 | 500 | Reihe A oben |
| 1,35 | 0,596 | 8490 | 7800 | Ziemlich gut |
| 1,35 | 0,744 | 3590 | 2853 | Nicht sehr gut |
| 1,35 | 0,605 | 1435 | 1360 | Gut |
| 1,35 | 0,871 | 401 | 640 | Ziemlich gut |
| 1,35 | 0,593 | 140 | 137 | Reihe B oben |
| 1,45 | 0,793 | 70 | 60 | Reihe C oben |
| 1,77 | 0,497 | 21 | 18 | Reihe D oben |

Wie man sieht, hat *a*, roh gesagt, den konstanten Wert 0,6, und *b* ist im allgemeinen etwas größer als der Anfangswiderstand *c*₀, wie natürlich scheint. Auch nimmt *b* im allgemeinen ab, wenn der Druck *D* wächst, wie der physikalischen Bedeutung von *b* entspricht.

Wenn eine lineare Beziehung zwischen *c* und *p* besteht, so sind *c* und *W* durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden, d. h. die *c W*-Kurven sind Kegelschnitte. Ist nämlich

$$\frac{p}{a} + \frac{c}{b} = 1, \text{ oder } p = a \left(1 - \frac{c}{b}\right),$$

so folgt aus der Beziehung zwischen *p*, *c* und *W*, nämlich

$$p = \frac{c e}{W + c} \text{ (vgl. p. 758),}$$

daß

$$a \left(1 - \frac{c}{b}\right) = \frac{c e}{W + c},$$

oder

$$c^2 + c(W - a b + e b) - a b W = 0.$$

Die kritische Spannung.

Wird nun die angelegte Potentialdifferenz immer größer, so tritt plötzlich (etwa bei $p = 0,5$ Volt bis $p = 0,25$ Volt, je nach dem Kohärerzustande) die spezifische Kohärerwirkung ein, d. h. der Widerstand sinkt plötzlich sehr stark. Der hierzu nötige Wert der anzulegenden Potentialdifferenz p soll die *kritische Spannung* genannt werden. Ist die angelegte Spannung gleich der kritischen Spannung oder nur wenig größer, etwa (um 0,02 Volt), so tritt die Kohärerwirkung erst nach einiger Zeit ein. Die Größe der kritischen Spannung ist nicht konstant, wie man aus den angegebenen Reihen sieht. Die kritische Spannung liegt in Reihe A ungefähr bei 0,484 Volt, in Reihe B ist sie über 0,289 Volt, in Reihe C ist sie ungefähr 0,354 Volt, und in Reihe D ungefähr 0,244 Volt. Ihre Größe hängt zum Teil vom äußeren Druck ab, gerade wie der Anfangswiderstand. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die hier gefundenen Verhältnisse.

| Anfangswiderstand | Kritische Spannung | Druck D |
|-------------------|-----------------------|-----------|
| 563 Ω | 0,48 Volt | 1,25 g |
| 670 | $0,49 < p_c < 0,56$ " | 1,25 |
| 739 | 0,30 " | 1,25 |
| 108 | $0,39 < p_c < 0,47$ " | 1,35 |
| 137 | $0,29 < p_c$ " | 1,35 |
| 416 | $0,36 < p_c < 0,48$ " | 1,35 |
| 60 | 0,35 " | 1,45 |
| 83 | 0,37 " | 1,45 |
| 17 | 0,24 " | 1,77 |

Es wird später gezeigt, daß der Anfangswiderstand und die kritische Spannung von der Dicke der den Kohärer bedeckenden Oxydschicht abhängen.

Verhalten des Kohärrers nach dem Eintritt der Kohärerwirkung.

Abhängigkeit der eintretenden Wirkung von dem Widerstande des Stromkreises. Versuch mit einer Thermosäule.

Ist eine Potentialdifferenz, die größer als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden angelegt, so tritt Kohärerwirkung ein, und der Kohärerwiderstand wird plötzlich kleiner, und zwar um so viel, daß sich die Spannung p ungefähr auf einen bestimmten Wert, der etwa 0,2 Volt beträgt, einstellt (Gleichgewichtsspannung).

Wie weit daher der Kohärerwiderstand dann sinkt, hängt vom äußeren Widerstande der gebrauchten Schaltung ab. Ist dieser sehr klein, so muß auch der Kohärerwiderstand bei Überschreitung der kritischen Potentialdifferenz auf einen ganz minimalen Wert fallen. Um dies zu zeigen wurde die folgende Methode benutzt. Statt des Akkumulators der früheren Methode

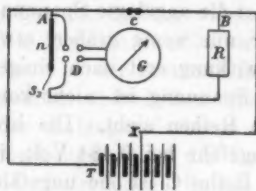


Fig. 4.

wurde eine Gölchersche Thermosäule gebraucht, die sich bei T in der nebenstehenden Fig. 4 befindet. Die einzelnen Elemente der Thermosäule hatten eine Spannung von ungefähr 0,06 Volt; durch Abzweigung bei X konnte eine beliebige Anzahl derselben eingeschaltet werden. Der übrige Teil der Schaltung, mit Weglassung der Widerstände w_1 , w_2 und W , entspricht vollkommen der Schaltung auf p. 756. Weil der Widerstand W hier fehlt, kann der Widerstand c des Kohälers nicht gemessen werden. Es war aber möglich durch eine einfache Einrichtung, die hier nicht gezeigt wird, zu der Schaltung auf p. 756 überzugehen, und so den Widerstand des Kohälers zu messen. Ein einziges Resultat genügt, um das Ergebnis dieser Beobachtung darzulegen; es ergab sich zunächst:

$$D = 1,35 \text{ g}, \quad c_0 = 110 \Omega \text{ bei } p = 0,0106 \text{ Volt.}$$

Nun wurde die Spannung 0,3936 Volt für 3 Minuten angelegt. Sodann wurde $c = 106 \Omega$ bei $p = 0,0104$ Volt gemessen d. h. der Kohärerereffekt war durch Anlegen der früheren Spannung $p = 0,39$ Volt noch nicht erreicht. Nun wurde die Spannung 0,4684 Volt angelegt, die aber sogleich zu fallen anfang und am Ende von 3 Minuten den Wert $p = 0,2700$ Volt erreichte.

Eine Messung des Kohärerwiderstandes mit p gleich 0,0038 Volt ergab dann

$$c = 0,02 \Omega.$$

Die vollkommene Einstellung auf die Gleichgewichtsspannung nimmt eine lange Zeit in Anspruch, sogar mehrere Stunden, und wurde daher niemals abgewartet. Ein Beispiel dieses Prozesses ist in Reihe C, zweite Kolumne, Zeile 2 und 3 von unten angeführt (Punkt 18 in der p - c -Kurve C). Hier fiel die angelegte Spannung von dem Wert 0,2581 Volt in 17 Min.

auf 0,2419 Volt, und damit sank der Kohärerwiderstand von $18,7 \, \Omega$ auf $17,4 \, \Omega$. Die Gleichgewichtsspannung hat für einen Kohärer aus Stahl ungefähr den Wert 0,20 Volt. *Sie ist vom Drucke an der Kontaktstelle und von anderen Umständen unabhängig.*

Über das Verhalten des Kohärrers nach Eintritt der Kohärerwirkung ist noch folgendes zu bemerken. Wird die Kohärerwirkung abgebrochen, bevor die Gleichgewichtsspannung sich eingestellt hat, so kann eine Spur der Elastizität des Kohärerwiderstandes vor dem Überschreiten der kritischen Spannung noch vorhanden sein. Beispiele hiervon bieten die Reihen C und D bei den ersten Messungen unter kleiner Spannung nach Eintritt der Kohärerwirkung. Ist aber die Gleichgewichtsspannung des Kohärrers ganz oder nahezu erreicht, so ist der Kohärerwiderstand annähernd konstant, auch wenn man ihn mit wechselnden Spannungen mißt, die nur die Gleichgewichtsspannung nicht überschreiten. *Die vor dem Überschreiten der kritischen Spannung beobachtete Elastizität des Kohärerwiderstandes ist jetzt vollständig verschwunden, sie hat sich sogar scheinbar umgekehrt, denn nun werden kleinere Werte des Kohärerwiderstandes bei kleineren Spannungen gefunden.* Beispiele sind in der Reihe A in der zweiten Kolumne in den sieben Messungen, die nach der 17-stündigen Pause folgen, und in den letzten Kolumnen von Reihen B und C zu sehen. *Ebenso zeigt jetzt der Kohärerwiderstand keine zeitliche Nachwirkung mehr.* Zeitliche Nachwirkung tritt erst wieder ein, wenn durch die angelegte Spannung die Gleichgewichtsspannung überschritten wird, wodurch dann, wie oben gesagt wurde, der Kohärerwiderstand weiter zu einem Werte sinkt, der aus der Gleichung

$$p_g = \frac{c}{W + c} e$$

oder

$$c(e - p_g) = W p_g$$

einfach aus W zu berechnen ist. In der Tat sind die cW -Kurven für den Zweig, der den Kohärerrefekt entspricht, gerade Linien, die durch den Koordinatenanfang gehen.

Die Gleichgewichtsspannung hat auch Aschkinass¹⁾ bemerkt, aber in einer anderen Weise gefunden. Er definiert

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 66. p. 303. 1898.

sie als die kleinste Spannung, die, wenn sie an den Kohärerenden angelegt wird, verhindert, daß der Kohärerwiderstand durch Klopfen auf große Werte wieder zurückgebracht werden kann, und bemerkt, daß sie ungefähr die Hälfte der kritischen Spannung beträgt. Dieser Wert ist also ungefähr übereinstimmend mit dem Werte, den ich hier als Gleichgewichtsspannung definiert und gemessen habe.

Theorie des Kohärrers

Das Verhalten des Kohärrers von $p = 0$ bis zur kritischen Spannung p_c läßt sich durch Annahme einer elastischen schlecht leitenden Schicht zwischen den Kohärerenden veranschaulichen. Der Kohärerwiderstand ist danach von $p = 0$ bis $p = p_c$ der Widerstand dieser Zwischenschicht. Die Dicke dieser Zwischenschicht, die auch durch den äußeren Druck beeinflußt wird, bestimmt den Anfangswiderstand. Wird eine Spannung an die Kohärerenden angelegt, so findet eine elektrostatische Anziehung zwischen denselben wegen ihrer Potentialdifferenz statt, und die Dicke der Zwischenschicht, und damit der Kohärerwiderstand, werden verkleinert.¹⁾ Bei Verminderung der Spannung wird die Anziehungskraft kleiner und die Zwischenschicht dehnt sich wegen ihrer Elastizität wieder aus, sodaß der Kohärerwiderstand wieder groß wird. Daß er nicht ganz zu seinem ursprünglichen Werte zurückkehrt, ist durch die unvollkommene Elastizität der Zwischenschicht erklärlich.

Wird nun die kritische Potentialdifferenz p_c erreicht, so tritt eine mechanische Beanspruchung der Zwischenschicht ein, der gegenüber sie nicht mehr genügende mechanische Festigkeit besitzt. Die schlecht leitende Schicht wird daher zerdrückt, sodaß sich die inneren metallisch leitenden Kohärerteile berühren, und zwar wird die Zwischenschicht in einem derartigen Umfang zersprengt, d. h. die metallische Berührungsfläche der Kohärerteile stellt sich auf eine derartige Größe ein, daß die Gleichgewichtsspannung p_g zwischen den Kohärerenden erreicht ist. Bei dieser Spannung p_g kann die Zwischenschicht gerade noch weiterer Zertrümmerung widerstehen. Wird eine größere Potentialdifferenz als p_g plötzlich an die

1) Der Kohärerwiderstand muß daher annähernd eine lineare Funktion von p sein.

Kohärerenden angelegt, so wird die Zwischenschicht weiter zerkümmert, d. h. der Kohärerwiderstand nimmt weiter ab, und zwar so weit, daß wieder die Gleichgewichtsspannung p_g zwischen den Kohärerenden sich einstellt, der die Zwischenschicht gerade noch das Gleichgewicht halten kann. Daß nun, wenn einmal der Kohärerereffekt, d. h. wirkliche metallische Berührung erreicht ist, größere Werte des Kohärerwiderstandes bei Spannungen in der Nähe der Gleichgewichtsspannung als bei kleineren Spannungen gefunden werden, ist auf die Erwärmung der metallisch sich berührenden Teile durch die größeren Stromstärken zurückzuführen.

Die Zwischenschicht.

Eine schlechtleitende Zwischenschicht des Kohäriers kann man künstlich herstellen (z. B. durch Petroleum, vgl. weiter unten); ohne besondere Behandlung spielt Oxydierung die Rolle der schlechtleitenden Zwischenschicht, wie schon von mehreren Autoren¹⁾ ausgesprochen wurde. Als der Kohärer aus Kupfer hergestellt war, wurden die Kontaktflächen mit feinem Schmirgelpapier (Nr. 000) glatt abgeschmirgelt. Der Anfangswiderstand bei einer Spannung unter 0,004 Volt gemessen ergab sich kleiner als 0,1 Ω . Nach Ablauf von 3 Tagen war er immer noch so klein. Die Stäbchen wurden nun 5 Min. lang in einem Luftbad bei ungefähr 230° erhitzt. Nun lag der Anfangswiderstand zwischen 25 Ω und 100 Ω . Die kritische Spannung war zu 0,23 Volt bestimmt. Nach mehreren Wochen wurde die kritische Spannung wieder untersucht. Ihr Wert war einmal 0,93 Volt, und in zwei anderen Fällen lag sie über 1,0 Volt. Die Kontaktflächen wurden nun leise abgeschmirgelt, mit dem Resultat, daß die kritische Spannung fiel und zwischen 0,17 Volt und 0,23 Volt lag. An dem nächsten Tag lag sie zwischen 0,63 Volt und 0,68 Volt. Zunächst wurden die Kontaktflächen abgeschmirgelt, bis der Anfangswiderstand sehr klein wurde. Die Stäbchen wurden nun erhitzt, bis eine sichtbare Oxydschicht vorhanden war, und dann die kritische Spannung bestimmt. Ihr Wert war ungefähr 0,50 Volt. Die Stäbchen wurden dann weiter erhitzt. Die kritische Spannung war nun auf 0,70 Volt gestiegen. Es ergibt sich somit, daß die

1) Vgl. O. Lodge, *Electrician* 40. p. 91. 1897; P. Drude, *Wied. Ann.* 65. p. 485. 1898. — Etwas Einfluß hat auch die Gasschicht nach E. Dorn, *Wied. Ann.* 66. p. 159. 1898.

kritische Spannung mit der Dicke der Oxydschicht wächst, die die Rolle der Zwischenschicht spielt.

Mit Zink war die Sache dieselbe. Der Kohärerwiderstand war sehr klein, wenn die Kontaktflächen glatt abgeschmirgelt waren, und nach 4 Tagen bestand noch der kleine Wert. Die Stäbchen wurden in befeuchteter Luft bei 100° — 110° erhitzt, bis der Anfangswiderstand groß geworden war. Die Untersuchung der kritischen Spannung ergab:

| Anfangswiderstand | Kritische Spannung |
|--|--------------------------|
| 464 Ω | $0,58 < p_c < 0,64$ Volt |
| 316 | 0,58 " |
| 427 | $p_c < 0,52$ " |
| Die Kontaktflächen wurden leise abgeschmirgelt mit den Resultaten: | |
| 740 Ω | $p_c < 0,53$ Volt |
| 605 | $p_c < 0,46$ " |
| 517 | 0,36 " |
| 540 | $p_c < 0,36$ " |
| 363 | $0,29 < p_c < 0,36$ " |

Die Stäbchen wurden weiter erhitzt mit dem Resultate:

| | |
|---------------|-----------|
| 2860 Ω | 0,47 Volt |
| 2170 | 0,46 " |

Die Untersuchung mit einem Stahlkohärer — zum Teil wurde der schon (p. 755) beschriebene Kohärer und zum Teil der später benutzte Kohärer (vgl. p. 786) benutzt — lieferte ähnliche Resultate. Das Wachsen des Anfangswiderstandes mit der Dicke der Oxydschicht ließ sich hier leicht beobachten. Sobald wie möglich nach dem Abschmirgeln der Kontaktflächen wurde der Kohärer in Ordnung gebracht, und sein Widerstand gemessen. Es währte immer ein paar Minuten, um den Kohärer zu justieren, und dieser Zeitraum genügte für das Zustandekommen einer dünnen Oxydschicht. Demzufolge war der Anfangswiderstand bei solchen Versuchen, obwohl klein, immer noch merklich. Der kleinste gefundene Wert war 0,1 Ω . Der Galvanometeraussschlag war aber nicht konstant, sondern änderte sich beständig mit plötzlichen Sprüngen, indem er bald größer, bald kleiner, aber so, daß er mit der Zeit immer größer und konstanter wurde. Hierdurch war die Bildung einer Oxydschicht sichtbar. Nun wurden die Kontaktflächen glatt abgeschmirgelt, und dann der Anfangswiderstand und die kritische Spannung von Zeit zu Zeit gemessen. Das Resultat ist nachfolgend angegeben.

| Zeitraum nach dem Abschmiegeln | | Anfangswiderstand Ohm | Kritische Spannung Volt |
|-----------------------------------|------------|--------------------------|----------------------------|
| | 13 Minuten | $e_0 < 150 \Omega$ | $0,24 < p_c < 0,31$ |
| | 19 " | 134 Ω | $0,24 < p_c < 0,31$ |
| | 34 " | 225 | 0,32 |
| 1 Stunde | 20 " | 562 | 0,48 |
| 1 " | 27 " | 823 | 0,37 |
| 1 " | 33 " | 562 | $p_c < 0,37$ |
| 1 " | 40 " | 560 | $p_c < 0,37$ |
| 1 " | 48 " | 547 | 0,40 |
| 3 Stunden | 9 " | 591 | $p_c < 0,42$ |
| 3 " | 15 " | 1230 | $0,50 < p_c$ |
| 18 " | | 1747 | $0,48 < p_c < 0,54$ |
| 18 " | | 1630 | 0,48 |
| 18 " | | 2100 | 0,42 |

und von einem zweiten Versuche

| | | |
|--------|------|---------------------|
| 7 Tage | 3130 | $0,45 < p_c < 0,51$ |
| 7 " | 1450 | $0,40 < p_c < 0,46$ |
| 7 " | 1970 | 0,40 |
| 7 " | 2520 | 0,42 |
| 7 " | 1340 | $0,44 < p_c < 0,51$ |

Der äußere Druck D blieb während der Untersuchung ungeändert. Der zweite Versuch wurde angestellt, weil es später wahrscheinlich schien, daß das Wachsen der kritischen Spannung schließlich eine Grenze erreicht. Die kritische Spannung erreicht, wie man sieht, einen Grenzwert in ungefähr drei Stunden. Auch ist der Galvanometeraussschlag nun konstant geworden. Wenn man bedenkt, daß die Oxydschicht nicht überall dieselbe Dicke zu haben braucht, und daß die Kontaktflächen einander nicht immer in denselben Stellen berühren, so sind die verschiedenen Werte des Anfangswiderstandes und der kritischen Spannung unter demselben äußeren Druck leicht verständlich.

Es ist zunächst von Interesse zu erfahren, ob die Zwischenschicht notwendigerweise aus einem Metalloxyd bestehen muß. Die Kontaktflächen des Kupferkohärs — der wegen der schweren Oxydierbarkeit des Kupfers an der Luft benutzt wurde — waren glatt abgeschmiegelt, und es wurde versucht eine solche Einstellung zu treffen, daß die Luft zwischen den Kontaktflächen als Zwischenschicht diene. Dies gelang nicht. Es schien einmal erreicht zu sein. Das Ergebnis war aber nicht sehr befriedigend; auch konnte es nicht wieder gefunden

werden. Es wäre vielleicht möglich dies zu erreichen, wenn die Einrichtung des Kohärrers eine solche wäre, daß sehr kleine Änderungen der Distanz zwischen den Kontaktflächen mit Sicherheit vorgenommen werden könnten, wie z. B. dies der Fall in einigen der Versuche von Aschkinass war.¹⁾ Sodann stellte ich ein Zwischenschicht aus Petroleum her, indem die Kontaktflächen damit benetzt wurden. Wenn der äußere Druck einen passenden Wert, der schwer zu finden war, hatte, so funktionierte der Kohärer. Messungen der kritischen Spannung ergaben

$$p_c = 0,86, < 0,86, < 0,86, = 0,75 \text{ Volt.}$$

Aschkinass²⁾ hat auch Kohärerwirkung mit Methylalkohol als Zwischenschicht erreicht. Aus diesen Versuchen ist klar, daß andere schlechtleitende oder isolierende Substanzen die Rolle der Zwischenschicht spielen können. Daß diese Versuche der Lodgeschen Theorie widersprechen, wie Aschkinass behauptet, ist mir nicht klar.

Verhalten eines Kohärrers, der aus mehreren Kontaktstellen hintereinander bestand.

Um diese Versuchsbedingung zu ermöglichen, wurden zwischen die zwei Stäbchen des Stahlkohärrers noch zwei Stahlstäbchen von ungefähr derselben Größe und mit kugelförmig abgerundeten Enden in derselben Weise wie früher aufgehängt. Dadurch entstanden drei Kontaktstellen *A*, *B* und *C* (Fig. 5). Die

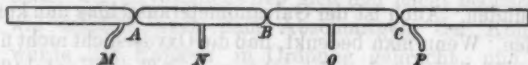


Fig. 5.

mittleren Stäbchen trugen auch kleine Stifte — *N* und *O* — die in Quecksilbernäpfchen eintauchten. Dadurch war es möglich, jede Kontaktstelle für sich zu untersuchen. Die kritischen Spannungen der Stellen *A*, *B* und *C* wurden bestimmt und dann die kritische Spannung des ganzen Kohärrers, d. h. die größte Potentialdifferenz, die dauernd zwischen *M* und *P* bestehen kann, ohne das Eintreten der Kohärerwirkung zu verursachen. Sie ergab sich im allgemeinen kleiner als die Summe der kritischen Spannungen der einzelnen Kontaktstellen, und hatte

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 66. p. 294. 1898.

2) l. c. p. 294.

keinen bestimmten Wert. Eine Potentialdifferenz, die zwischen M und P besteht, teilt sich zwischen den Stellen A , B und C je nach den Verhältnissen der Widerstände derselben. Wenn nun die Gesamtspannung zwischen M und P so groß wird, daß die Teilspannung an einer Stelle größer als die kritische Spannung derselben wird, so tritt Kohärerwirkung dort ein, und der Widerstand derselben sinkt. Die Gesamtspannung wird von neuem zwischen den einzelnen Stellen geteilt. Dieser Prozeß dauert entweder bis die Gleichgewichtsspannung sich an der einen Stelle einstellt, oder bis die Teilspannung an einer der anderen Stellen die kritische Spannung derselben überschreitet, sodaß Kohärerwirkung auch dort eintritt. In diesem Falle fällt fast die ganze Gesamtspannung der dritten Stelle zum Teil, ihre kritische Spannung wird auch wahrscheinlich überschritten werden, und der Widerstand des ganzen Kohärrers sinkt auf einen sehr kleinen Wert. Die Ergebnisse eines solchen Versuches sind in folgender Tabelle angegeben. In der ersten Kolumne steht die Gesamtspannung zwischen M und P , die in jedem Falle für anderthalb Minute angelegt war. Die Teilspannung an den Stellen A , B und C ist in den drei folgenden Kolumnen angegeben.

| Gesamtspannung | Teilung derselben | | | Bemerkungen | |
|-------------------------------|-------------------|-------|-------|---|-----------------------|
| | A | B | C | | |
| Volt | | | | Anfangs- widerstände | Kritische Spannung |
| | | | | A 1360 Ω | $0,64 < p_c < 0,87$ |
| | | | | B 1210 | 0,52 |
| | | | | C 446 | $0,61 < p_c < 0,68$ |
| 0,590 | 0,260 | 0,220 | 0,110 | | |
| 0,709 | 0,219 | 0,250 | 0,140 | | |
| 1,022 | 0,456 | 0,328 | 0,238 | | |
| 1,200 | 0,710 | 0,112 | 0,378 | Der Kohärerreffekt ist wahrscheinlich bei B eingetreten. | |
| 1,278 | 0,776 | 0,116 | 0,386 | | |
| 1,384 | 0,834 | 0,128 | 0,422 | Der Kohärerreffekt tritt hier bei A ein | |
| 1,504 | 0,894 | 0,146 | 0,462 | | |
| und die Spannungen fielen auf | | | | | |
| 0,760 | 0,204 | 0,178 | 0,378 | und die Endwiderstände waren A 0,65 Ω , B 0,75 Ω , C 0,61 Ω . | |

Bei der Messung der Endwiderstände war keine Rücksicht auf den Widerstand der Zuleitung genommen. Die Gesamtspannung am Ende ist daher scheinbar nicht nach den Verhältnissen der Endwiderstände geteilt. *Die Gleichgewichtsspannung ist der Anzahl der Kontaktstellen proportional.*

Die Resultate von Guthe und Trowbridge.¹⁾

Die Verfasser haben die folgenden „kritischen Potentialdifferenzen“ gefunden: für Eisen 0,222 Volt, für Kupfer 0,094 Volt und für Zink 0,096 Volt. Diese Werte sind viel kleiner als die von mir gefundenen kritischen Spannungen (vgl. p. 767 und 770), dagegen stimmen sie auffallend überein mit den von mir gefundenen Gleichgewichtsspannungen (Eisen etwa 0,2 Volt) Kupfer unter 0,14 Volt). Ich möchte behaupten, daß die Potentialdifferenzen, die die Verfasser gefunden und als „kritische Potentialdifferenzen“ bezeichnet haben, in Wirklichkeit Gleichgewichtsspannungen gewesen sind.

Wenn man eine Spannung, die größer als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden anlegt, so fällt der Kohärerwiderstand beim Eintreten der Kohärerwirkung *sogleich* auf einen Wert, den ich *den Sturzwert* nennen werde, und sinkt dann allmählich weiter, bis er endlich den Wert erreicht hat, der zur Einstellung der Gleichgewichtsspannung nötig ist (Gleichgewichtswert). Je mehr die unsprünglich angelegte Spannung die kritische Spannung überschreitet, je mehr nähert sich der Sturzwert dem Gleichgewichtswert, und schließlich fallen bei genügend hoher angelegter Spannung Sturz- und Gleichgewichtswert zusammen. Nun war die von Guthe und Trowbridge angewandte Methode eher geeignet Sturzwerte und die dazu gehörigen Spannungen zu bestimmen, als die kritischen Spannungen selbst. Aus dem eben Gesagten geht folgendes hervor: 1. Die steigenden Teile der von den Verfassern angeführten Kurven entsprechen Werten der angelegten Spannung²⁾, wobei Sturz- und Gleichgewichtswerte nicht zu-

1) l. c. (vgl. p. 754).

2) Die Werte der wirklich angelegten Spannungen sind von den Verfassern nicht angegeben worden. Auch ist man nicht im stande, sie annähernd zu berechnen, denn die Verfasser geben nicht die Anfangswiderstände des Kohärrers und die anderen Widerstände im Stromkreise

sammen fallen. 2. Die horizontalen Teile der Kurven entsprechen solchen Werten der angelegten Spannung, wofür der Sturzwert mit dem Gleichgewichtswert zusammenfällt. 3. Die den horizontalen Teilen gehörige Spannung ist eben die Gleichgewichtsspannung.

Folgende Übereinstimmung wäre noch hervorzuheben. Die Verfasser finden für ihre „kritische Potentialdifferenz“¹⁾ wie ich für meine Gleichgewichtsspannung, daß die betreffenden Werte für jedes Metall einen konstanten Wert haben, und daß für mehrere Kontakte diese Potentialdifferenz der Zahl der Kontaktstellen proportional ist. Die von mir gefundene kritische Spannung dagegen hängt ab vom äußeren Drucke, von der Dicke, und von der Natur der Zwischenschicht, und für mehrere Kontakte ist sie nicht notwendig der Zahl der Kontaktstellen proportional.

Daß die Verfasser keine zeitliche Nachwirkung gefunden haben, ist meiner Ansicht nach auf die von ihnen angewandte Untersuchungsmethode zurückzuführen.

B. Untersuchung mittels elektrischer Wellen.

Natur der Wirkung.

Es fragt sich, inwieweit die Wirkung der elektrischen Wellen auf den Kohärer und die schon beschriebene, die durch Anlegung einer Potentialdifferenz an die Kohärerenden mittels eines Gleichstromes hervorgerufen war, ähnlich sind. Der Widerstand des Kohärers wurde durch einen Funken in seiner Nähe auf einen nicht sehr kleinen Wert gebracht, und dann in derselben Weise wie früher untersucht. Das Verhalten des Kohärers war dasselbe, als ob sein Widerstand durch Anlegung einer Potentialdifferenz, die größer als seine kritische Spannung wäre, teilweise herumgetrieben worden sei. Wenn eine Spannung, die größer als seine Gleichgewichtsspannung war, angelegt wurde, so sank sein Widerstand noch weiter, bis die Gleichgewichtsspannung sich eingestellt hatte. Es ist zunächst zu bemerken, daß im allgemeinen die elektrischen Wellen den

an. Jedenfalls waren die angelegten Spannungen bedeutend größer als die kritischen Spannungen, denn die Verfasser verlangten, daß Kohärerwirkung sogleich bei Anlegung derselben eintreten sollte (vgl. p. 769).

1) Vgl. p. 754.

Kohärerwiderstand nicht auf einen minimalen Wert herunterzutreiben vermögen, obwohl sie beliebig lang darauf einfallen.¹⁾ Vielmehr fällt der Kohärerwiderstand in dem ersten Moment der Bestrahlung auf einen gewissen Wert, der gewöhnlich durch die weitere Bestrahlung nicht geändert wird. Wenn er aber eine Änderung erfährt, so kann diese sowohl eine Vergrößerung als eine Verkleinerung sein. Der Wert, worauf der Kohärerwiderstand fällt, entspricht vermutlich den Sturzwerten des mit Gleichstrom behandelten Kohäriers, wobei ich unter Sturzwert denjenigen Widerstand bezeichne, welchen der Kohärer im ersten Momente nach Anlegung einer Spannung zeigt, welche zum ersten Male die kritische Spannung überschritten hat (vgl. oben p. 776). Einfallende elektrische Wellen können eine Potentialdifferenz zwischen den Enden des Kohäriers hervorrufen, die bedeutend größer als die kritische Spannung ist, wie aus folgendem hervorgeht. Die kritische Spannung des Kohäriers der später angegebenen Reihe III (eine Beschreibung dieses Kohäriers ist auf p. 786 zu finden) war einmal so groß geworden, daß die Anlegung einer Potentialdifferenz von 0,8 Volt eine Minute lang Kohärerwirkung nicht hervorrief. Der Widerstand des Kohäriers fiel aber sogleich, als die elektrischen Wellen von dem 9 m entfernten Erreger — der später beschrieben wird — auf den Kohärer wirkten. In gleicher Weise rief die Anlegung einer Spannung von 0,6 Volt für 1 Min. an den Kohärer der Reihe IV (Beschreibung auf p. 788) keine Kohärerwirkung hervor, die aber sogleich bei Bestrahlung eintrat. Man sieht daher, daß die elektrischen Wellen im stande waren, eine Potentialdifferenz, die größer als 0,8 Volt bez. 0,6 Volt war, zwischen den Kohärierenden hervorzurufen.

Ermüdung des Kohäriers.

Eine Erscheinung, die erst in den späteren Versuchen mit elektrischen Wellen bemerkt wurde, soll zunächst besprochen

1) Am Schlusse der Reihen A und C (p. 759 u. 760) wurde es versucht, den Kohärerwiderstand durch Funken zwischen den Elektroden einer Influenzmaschine in der unmittelbaren Nähe des Kohäriers noch weiter herunterzutreiben. In diesen, sowohl wie in anderen Fällen waren die Funken ohne Einfluß.

werden, nämlich die Ermüdung des Kohärrers. Es wurde bemerkt, daß, obwohl die Wirksamkeit der Funken des Erregers dieselbe blieb, und obwohl keine Änderung an dem Erreger oder an dem Kohärer — dessen Kontaktflächen aus Stahl bestanden — gemacht wurde, die Werte des Kohärerwiderstandes, die am Anfang klein waren und ziemlich nahe zusammen lagen, nach wiederholten Bestrahlungen unregelmäßig zu werden anfangen, und endlich bedeutend größer wurden. Der Kohärer reagierte am Ende nicht mehr so stark noch so regelmäßig; er war, sozusagen, müde geworden. Wenn man nun die Kontaktflächen abschmirgelte und eine neue Oxydschicht anlaufen ließ, so fand man wieder die kleinen regelmäßigen Werte; der Kohärer war nun wieder „frisch“. Eine Untersuchung dieser Erscheinung wurde in folgender Weise ausgeführt. Die Kontaktflächen des benutzten Kohärrers — desjenigen der Reihen IV und V, der auf p. 788 beschrieben ist —, die aus Stahl bestanden, waren kugelförmig und hatten einen Radius von ungefähr 1 mm. Sie waren zuerst glatt abgeschmirgelt, der Kohärer dann in Ordnung gebracht, und die kritische Spannung wurde bestimmt, nachdem sie ihren Endwert erreicht hatte. (Diese Bestimmung ist auf p. 773 angegeben.) Durch wiederholte Bestrahlung wurde der Kohärer zunächst ermüdet, und die kritische Spannung des müden Kohärrers wurde zuletzt bestimmt. In der ersten Kolumne der folgenden Tabelle sind zehn Endwerte (aus Reihe V, vgl. p. 789, bei einer Erregerlänge von 50 cm entnommen) des Kohärerwiderstandes angegeben, die unter gleichen Umständen, während der Kohärer frisch war, gefunden wurden. In der zweiten Kolumne sind Beispiele der kleinen Werte, die immer noch gelegentlich vorkamen, während der Kohärer ermüdet wurde. In der dritten Kolumne sind acht hintereinander folgende Messungen, die gemacht wurden, als der Kohärer schon ziemlich müde geworden war. Zunächst folgen zwei Werte, als der Kohärer noch müder war, und zuletzt sind die Resultate der Bestimmung der kritischen Spannung am Ende angegeben. Es ist noch zu erwähnen, daß es sich als vorteilhaft erwies, um regelmäßige Werte des Endwiderstandes zu bekommen, den Anfangswiderstand weder zu groß noch zu klein zu wählen. Nun war es ziemlich leicht, einen Anfangswiderstand auf einen passenden Wert zu bringen, solange der

Kohärer noch frisch war. Je mehr aber der Kohärer ermüdete, um so schwieriger wurde dies. Man konnte somit aus der Leichtigkeit der Einstellung des Anfangswiderstandes den Zustand des Kohärsers beurteilen, und damit auch mit einiger Sicherheit voraussagen, ob die elektrischen Wellen den Kohärerwiderstand weit heruntertreiben würden oder nicht. Das so gewonnene Urteil über den Zustand des Kohärsers ist bei den Bestimmungen der kritischen Spannung des müden Kohärsers angegeben. *Gut* bedeutet, daß es leicht war, einen passenden Anfangswiderstand zu bekommen, *schlecht* das Umgekehrte.

Kritische Spannung am Anfang.

| | |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1. $0,48 < p_c < 0,54$ Volt | 3. $0,42$ Volt |
| 2. $0,48$ „ | 4. $0,42 < p_c < 0,48$ „ |

Endwerte des Kohärerwiderstandes.

| Kohärer frisch | Im Laufe der Ermüdung | Kohärer müde | Kohärer noch müde |
|-------------------|----------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1,88 Ω | 2,18 Ω | 3,48 Ω | 8,07 Ω |
| 1,63 | 1,49 | 3,47 | 8,70 |
| 1,96 | 2,42 | 1,47 | |
| 1,88 | 2,02 | 2,69 | |
| 2,34 | 1,98 | 2,36 | |
| 2,27 | 1,46 | 2,02 | |
| 2,02 | 2,06 | 2,78 | |
| 2,16 | 1,58 | 3,41 | |
| 1,96 | 2,56 | | |
| 2,18 | | | |
| | | | 2,71 Ω = Mittelwert |
| | 2,08 Ω = Mittelwert | | |

Untersuchung der kritischen Spannung am Ende.

| Zustand | Kritische Spannung Volt | Zustand | Kritische Spannung Volt |
|-----------------|-------------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 1. Ziemlich gut | 0,47 | 5. Ziemlich gut | $0,42 < p_c < 0,48$ |
| 2. Schlecht | 0,54 | 6. Schlecht | 1,03 |
| 3. Schlecht | 0,54 | 7. Schlecht | 0,55 |
| 4. Ziemlich gut | $0,42 < p_c < 0,48$ | 8. Ziemlich gut | $0,48 < p_c < 0,54$ |

Am Schluß dieser Messungen wurde 15 Min. lang vergeblich versucht, dem Kohärer einen passenden Anfangswiderstand zu geben. Man sieht, daß die kritische Spannung größer

ist für den müden Kohärer als für den frischen. Ein frischer Kohärer gewinnt nicht im Laufe der Zeit eine so hohe kritische Spannung, wenn er sich selbst überlassen wird, wie hier der ermüdete Kohärer, wie aus dem auf p. 773 angegebenen Versuche hervorgeht.

In dem eben besprochenen Versuche waren die Kontaktflächen kugelförmig mit einem Radius von ungefähr 1 mm. In frischem Zustand konnte der Kohärer 40—50 mal bestrahlt werden, bevor die Ermüdung sich merklich machte, mit Ausnahme der gelegentlich vorkommenden großen Werte. Nun wurden aber in anderen Untersuchungen Kohärer benutzt, worin eine Nadelspitze und eine Kugelfläche (von derselben Größe wie vorher) die Kontaktstelle bildeten. Es wurde gefunden, daß der Kohärer schon nach 15—20 maligem Heruntertreiben seines Widerstandes durch Bestrahlung müde war. Die Nadelspitze bildet hier eine viel kleinere Kontaktfläche als die Kugelfläche. Jene muß daher viel eher als diese müde werden. In der Tat konnte man den Kohärer wieder frisch machen, indem man die Nadelspitze allein abschmirkelte. Nun wurde vielleicht die Nadelspitze noch einmal müde, ehe die Kugelfläche wegen ihrer Ermüdung abgeschmirkelt werden mußte.

Eine Ermüdung des Kohärrers in anderem Sinne, d. h. so, daß seine Oxydschicht immer geringer wird und sein Anfangswiderstand kleiner, ist zu erwarten, wenn man den Kohärer in sauerstofffreier Umgebung wiederholt auf Kohärerereffekt beansprucht. In der Tat hat Lodge¹⁾ dies beobachtet, indem er den Kohärer in einer Atmosphäre von Wasserstoff einschloß.

Die Ermüdung des Kohärrers bei Benutzung mit Gleichstrom wurde nicht bemerkt, aber es wurde auch bei diesen Versuchen der Kohärer nicht so oft auf Kohärerereffekt beansprucht, wie bei den Versuchen mit elektrischen Wellen. Wenn sich herausstellen sollte, daß tatsächlich eine Ermüdung des Kohärrers, die wesentlich in einer Verdickung der Oxydschicht zu bestehen scheint, nur bei elektrischen Wellen und nicht bei Gleichstrom eintritt, so liegt die Vermutung nahe,

1) O. Lodge, *Electrician* 40. p. 90. 1897.

daß die bei kräftigen elektrischen Wellen auftretenden Fünkchen¹⁾ zwischen den Kohärerenden diese Verstärkung der Oxydschicht und damit die Ermüdung des Kohärrers bewirken.

Abschnitt II. Resonanzversuche mit dem Kohärer.

Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist es wichtig zu prüfen, ob man deutliche Resonanz in einer Drahtleitung beobachten kann, welche einen Kohärer enthält. Versuche in dieser Richtung hat Kiebitz²⁾ angestellt, aus denen zu folgen scheint, daß der von ihm benutzte (Schrauben-)Kohärer sehr große (∞ -große) Kapazität besitzt. Da aber Kiebitz einen Kohärer mit sehr vielen Kontaktstellen benutzt hat, während meine Kohärer nur eine Kontaktstelle besaßen, so war zu hoffen, daß diese Kohärer sowohl eine andere Kapazität besaßen als auch, daß sie für Resonanzversuche noch geeigneter seien. Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist es jedenfalls wichtig, Kohärer von möglichst kleiner Kapazität anzuwenden, weil dann die Potentialdifferenz zwischen den Kohärerenden durch einfallende Wellen um so höher getrieben wird.

Versuchsanordnung.

Die Einrichtung zur Erregung der elektrischen Wellen ist in Fig. 6 gezeichnet. Der Erreger ist mit *E* bezeichnet. *I* ist ein Induktorium mit einem Deprezunterbrecher. Der Strom von vier Akkumulatoren wurde für die Primärspule gebraucht. Bei *U* befindet sich ein Stromunterbrecher³⁾, wodurch der Primärstrom für eine bestimmte kurze Zeit geschlossen werden konnte. Von den Polen der Sekundärspule führten zwei dünne

1) Bei Gleichstrom ist das Auftreten von Fünkchen weder beobachtet, noch wahrscheinlich, noch notwendig, um den Kohärereffekt zu erklären. Im Gegensatz dazu behauptet G. Schlabach (Physik. Zeitsch. 2. p. 382. 1901) daß, „wie es jetzt fast allgemein geschieht, der Funkenwirkung, die man doch nicht entbehren kann, von vornherein die Hauptrolle zuzuschreiben sei“. Dieser Meinung kann ich mich durchaus nicht anschließen.

2) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 6. p. 741. 1901.

3) Eine Beschreibung desselben findet man bei F. Kiebitz, l. c. p. 743.

Drähte, die etwas über einen Meter lang waren und einander parallel und in kleinem Abstand zum Erreger hinliefen. Die Konstruktion des Erregers ist in Fig. 7. angegeben. Eine Glasröhre *C*, in einen Holzklötz befestigt, trug oben ein Näpfchen *N* aus Hartgummi. Die gleich langen, horizontal gestreckten geraden Erregerstäbe *D* und *D'* aus 3 mm dickem Kupferdraht waren durch gegenüberliegende, sie eng klemmende Löcher in das Näpfchen eingeführt, und ihre Enden, die etwas abgerundet waren, wurden fast zusammengebracht. Der eine Draht *B*

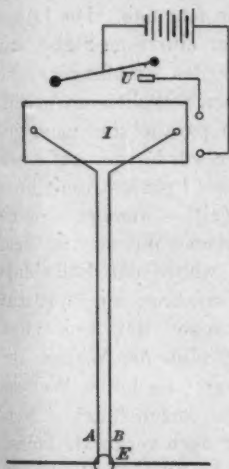


Fig. 6.

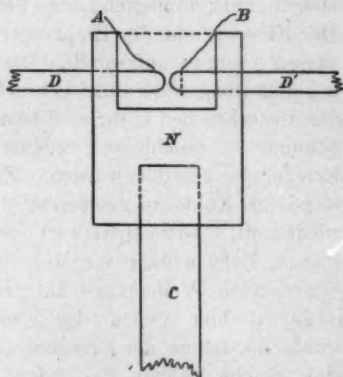


Fig. 7.

vom Induktorium paßte in ein kleines Loch, das dicht an dem Ende des Stabes *D'* war. Zwischen den Enden des zweiten Drahtes *A* und des anderen Stabes *D* blieb in den ersten Versuchen eine kleine Nebenfunkstrecke. Veränderungen in der Länge dieser Nebenfunkstrecke waren aber schwer zu vermeiden und verursachten Störungen. Deshalb wurde sie später weggelassen und die Verbindung zwischen *A* und *D* in derselben Weise, wie die zwischen *B* und *D'* hergestellt. Das Näpfchen — Fig. 8 stellt es in natürlicher Größe dar — war mit Petroleum gefüllt. Spätere Versuche zeigten, daß eine größere Regelmäßigkeit in der Wirksamkeit der Funken durch Wechseln des Petroleums in dem Näpfchen

von Zeit zu Zeit herbeigeführt wurde. Ein beständiges aber langsames Wechseln des Petroleums wurde deshalb durch zwei Heber, der eine zum Füllen, der andere zum Leeren, zu stande gebracht. Die Länge der Funkenstrecke betrug 0,2 mm und wurde von Zeit zu Zeit kontrolliert, indem die Stellung der Erregerstäbe, wenn nötig, so geändert wurde, daß man einen blanken Draht von 0,2 mm Durchmesser gerade zwischen ihre Enden stecken konnte.

Methoden der Untersuchung.

Die Methode der Untersuchung war folgende. Die Länge des Erregers, d. h. die doppelte Länge der einzelnen Stäbe, war anfangs bedeutend größer als die Länge des Empfängers, die ebenfalls der doppelten Länge der einzelnen Stäbchen entspricht. Der Erreger und der Empfänger wurden parallel in einem gewissen Abstand aufgestellt. Der Kohärer wurde nun auf einen hohen Anfangswiderstand gebracht und der Primärstrom durch den Unterbrecher *U* für eine bestimmte Zeit — weniger als eine Sekunde — geschlossen, wodurch elektrische Wellen von dem Erreger ausgesandt wurden. Zunächst wurde der Endwiderstand des Kohäriers gemessen. Dieses Verfahren wurde 10mal wiederholt. Der Mittelwert der Messungen des Endwiderstandes lieferte dann ein Maß für den Einfluß der Wellen der betreffenden Wellenlänge auf den Kohärer; die halbe Wellenlänge ist hier gleich der Erregerlänge anzunehmen. Nun wurde die Länge des Erregers nach und nach verkürzt, indem man gleiche Längen von jedem Stab abkniff; für jede Länge wurden zehn Messungen gemacht. Dies wurde fortgesetzt, bis die Erregerlänge bedeutend kürzer als die Empfängerleitung geworden war. Dann stellte ich eine Kurve auf, worin die Abszissen Längen des Erregers, und die Ordinaten die Mittelwerte der Endwiderstände für die verschiedenen Erregerlängen darstellen. Wenn nun der Empfänger auf eine bestimmte Wellenlänge anspricht, so sollte diese Kurve für die entsprechende Länge des Erregers ein Minimum des Kohärerwiderstandes zeigen, und je deutlicher dieses Minimum hervortritt, desto größer ist die Ausbildung der Resonanz zwischen Erreger und Empfänger.

Die Einrichtung zur Messung des Widerstandes des Kohäriers und zur Bestimmung der kritischen Spannung ist in Fig. 8

angegeben. Der Kohärer c stand allein auf einer festen Unterlage. Zwei möglichst kurze Drähte, die entweder vertikal oder in der Fortpflanzungsrichtung der elektrischen Wellen verliefen, führten von den Quecksilbernäpfchen des Kohärrers (vgl. p. 755) zu zwei anderen A und D auf einem kleinen Tische. Durch eine Wippe konnten die Näpfchen A und B bez. D und E , wenn nötig, bequem verbunden werden. Die Stromquelle war die Thermosäule T , wovon durch Abzweigung bei X im allgemeinen bloß ein Element gebraucht wurde, um sicher zu sein, daß die Spannung, die an Kohärerenden während der Messung des Widerstandes angelegt wurde, die Gleichgewichtsspannung niemals überschritt. Ein Millivoltmeter G von Keiser

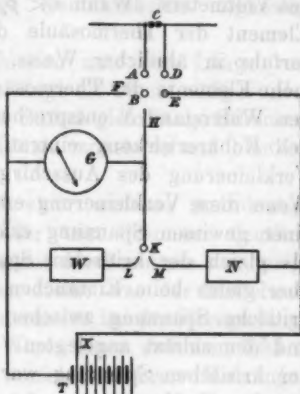


Fig. 8.

& Schmidt mit einem Widerstand von 161Ω diente zur Messung der Spannungen. Die Messung des Kohärerwiderstandes geschah folgenderweise. Der Widerstand N wurde gleich $161 \times 9 = 1449 \Omega$ gemacht, und das Drahtende M in das Quecksilbernäpfchen K eingetaucht. Der Ausschlag des Voltmeters gab somit $\frac{1}{10}$ der Spannung e_1 des gebrauchten Elementes. Nun wurde das Drahtende L statt M in K , und das Drahtende H in B eingetaucht, und die Verbindungen zwischen A und B bez. D und E wurden hergestellt. Zunächst änderte man den Widerstand W bis der Ausschlag e_2 , wenn möglich, wenigstens 40 Skt. betrug. Der Widerstand c des Kohärrers ist dann gegeben durch

$$c = w' \frac{e_1 - e_2}{e_2}, \quad \text{wo} \quad w' = \frac{1}{\frac{1}{W} + \frac{1}{161}}.$$

Die Bestimmung der kritischen Spannung erfolgte so. Die Spannung e des Elementes der Thermosäule wurde gerade so wie früher abgelesen, indem man das Drahtende M in K eintauchte. A und B bez. D und E waren schon in Verbindung,

und man tauchte nun das Drahtende F in B für 1 Min., wodurch die ganze Spannung e an die Kohärerenden angelegt wurde. War die Spannung e größer als die kritische Spannung p_c , so merkte man eine plötzliche Verkleinerung des Ausschlages des Voltmeters. Wenn $e < p_c$ war, so schaltete man noch ein Element der Thermosäule durch Änderung von X ein und verfuhr in ähnlicher Weise. Man schaltete nun mehr und mehr Elemente der Thermosäule ein — zugleich war es nötig, den Widerstand N entsprechend zu vergrößern — bis schließlich Kohärerwirkung eintrat, was sich durch die plötzliche Verkleinerung des Ausschlages deutlich bemerkbar machte. Wenn diese Verkleinerung erst einige Zeit nach der Anlegung einer gewissen Spannung erfolgte, so wurde diese Spannung als gleich der kritischen Spannung angenommen. Wenn sie aber gleich beim Eintauchen von F in B erfolgte, so lag die kritische Spannung zwischen der eben angelegten Spannung und der zuletzt angelegten. Diese Methode zur Bestimmung der kritischen Spannung war sehr bequem, und war in der Tat für die Messungen auf p. 772—775 und p. 780 benutzt.

Versuche.

Für kurze Erregerlänge — 12 cm — konnte ich keine Resonanz finden, die Länge wurde daher auf 50 cm vergrößert. Um die Vorteile von Kupfer und von Stahl zugleich zu haben, bestanden die Stäbchen aus 25 cm langem und (fast auf der ganzen Länge) aus 2 mm dickem Kupferdraht, und trugen am Ende kurze Stahlkuppen, die kugelförmig — Radius etwa 1 mm — abgerundet waren und die die Kontaktflächen bildeten. Zuführungsstifte waren wie früher dicht an den Kontaktflächen eingesetzt, wo sie am wenigsten die elektrischen Schwingungen in den Stäbchen stören konnten. Die Aufhängung erfolgte durch Seidenfäden.¹⁾ Der so gebildete Empfänger hatte des Kupfers wegen möglichst wenig Dämpfung. Weil die Kontaktflächen aus Stahl bestanden, konnte man leicht den störenden Einfluß der Ermüdung vermeiden, indem man nach 30—50 Messungen die Kontaktflächen glatt ab-

1) Vgl. die Dissertation hinsichtlich der genaueren Beschreibung.

schmirgelte, eine neue Oxydschicht (von selbst) anlaufen ließ und so den Kohärer wieder in frischen Zustand brachte. Es war gerade diese Schwierigkeit, Oxydschichten von bestimmter Dicke und somit von bestimmter kritischer Spannung leicht herzustellen, die das Kupfer für Kontaktflächen ungünstig machte.

Die Stäbe des Erregers erhielten nun eine Länge von 8 cm. Wenn eine größere Erregerlänge als 16 cm nötig wurde, so befestigte man an diesen kurzen Stäben gleichlange Stäbchen von Kupferdraht von passender Länge mittels feinem blanken Kupferdraht.

Fünf Reihen, jedesmal mit einer anderen Anordnung, wurden nun gemacht, und in jeder tritt Resonanz deutlich hervor. Wie groß die Regelmäßigkeit der Resultate war, zeigt folgendes Beispiel. In der ersten Reihe war der Mittelwert von zehn Messungen des Endwiderstandes bei der Erregerlänge 49,5 cm $2,10 \Omega$. Die einzelnen Werte lagen zwischen $1,35 \Omega$ und $2,69 \Omega$. Vier Tage später, nachdem mehrere Messungen bei anderen Erregerlängen inzwischen gemacht worden waren, wurden wieder 15 Messungen bei der Länge 49,5 cm gemacht. Der Mittelwert war $2,09 \Omega$, der kleinste einzelne Wert $1,61 \Omega$, der größte $2,52 \Omega$ ¹⁾

Resultate.

Es folgt eine Beschreibung der Anordnung in jeder der fünf Reihen, und danach eine Tabelle der Resultate der Messungen.

Reihe I.

Empfänger und Erreger geradlinig. Beide Kontaktflächen kugelförmig; Kugelradius ungefähr 1 mm. Empfängerlänge 50 cm.

Reihe II.

Empfänger und Erreger geradlinig. Eine Kontaktfläche kugelförmig wie früher. Die Stahlkuppe des anderen Stäbchens war durch eine Nähnadelspitze ersetzt. Die Nadelspitze war etwas stumpf. Die Nadelspitze und die Kugelfläche bildeten also die Kontaktstelle. Empfängerlänge 50 cm.

1) Ein Beispiel von zehn solchen Messungen ist schon in der ersten Kolonne an p. 780 gegeben worden.

Reihe III.

Anordnung dieselbe wie in Reihe II. Die Nadelspitze war hier ganz fein abgeschliffen.

Reihe IV.

Erreger geradlinig. Empfängerlänge 50 cm. Empfänger kreisförmig. Radius des Kreises ungefähr 8 cm, sodaß die Enden der Empfängerstäbchen, die die Kontaktstelle nicht bildeten, 7 mm voneinander entfernt waren. Ebene des Empfängerkreises horizontal. Der Erreger lag in dieser Ebene. Kontaktstelle dem Erreger zugekehrt. Aufhängung durch Fäden in einer ähnlichen Weise wie früher. Kontaktflächen kugelförmig wie in Reihe I.

Reihe V.

Empfänger kreisförmig, gerade wie in Reihe IV. Kontaktflächen immer noch kugelförmig. Erreger auch kreisförmig. Die Erregerstäbe waren ganz dicht an dem Hartgumminäpfchen abgeschnitten und in ihre Enden waren Löcher von 1 mm Durchmesser gebohrt. In diese Löcher wurden Stücke aus 1 mm dickem Kupferdraht von der gewünschten Länge und Krümmung eingesteckt und durch Reibung gehalten. Wie im Empfänger kamen die freien Enden nicht zusammen, sondern waren 7 mm voneinander entfernt. Sie waren mit Paraffin überdeckt, um das Überspringen von Funken an dieser Stelle zu vermeiden. Die Ebene des Erregers war die des Empfängers. Die Funkenstrecke war dem Kohärer zugekehrt. Versuche ergaben, daß kleine Änderungen in der Entfernung — 7 mm — der freien Enden des Erregers bez. des Empfängers ohne bedeutenden Einfluß waren. Dagegen war es schwer, bei der angegebenen Methode der Änderung der Erregerlänge Änderungen in der Länge der Funkenstrecke zu vermeiden, und dadurch waren Unregelmäßigkeiten der Resultate hineingebracht. Überhaupt waren die Messungen in dieser Reihe nicht so befriedigend wie in den anderen.

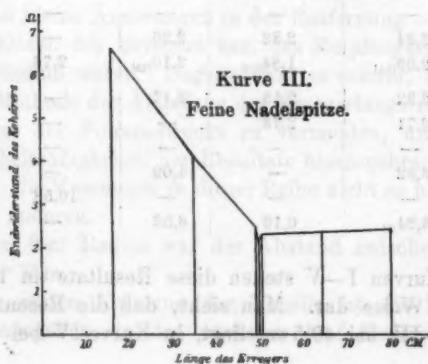
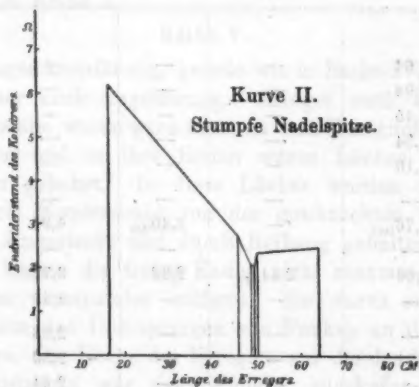
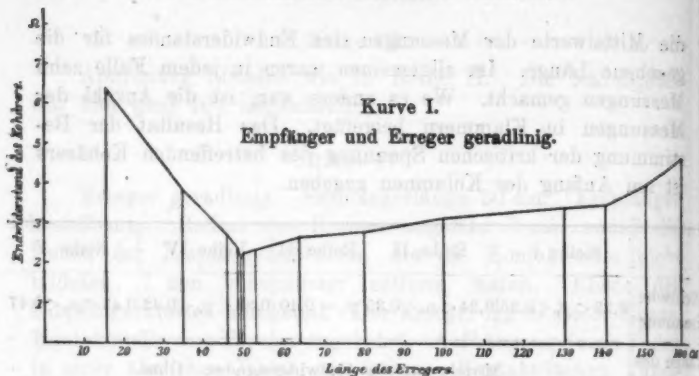
In allen fünf Reihen war der Abstand zwischen Kohärer und Erreger 8 m.

In der ersten Kolumne der Tabelle ist die Länge des Erregers angegeben, in den nächsten fünf Kolumnen folgen

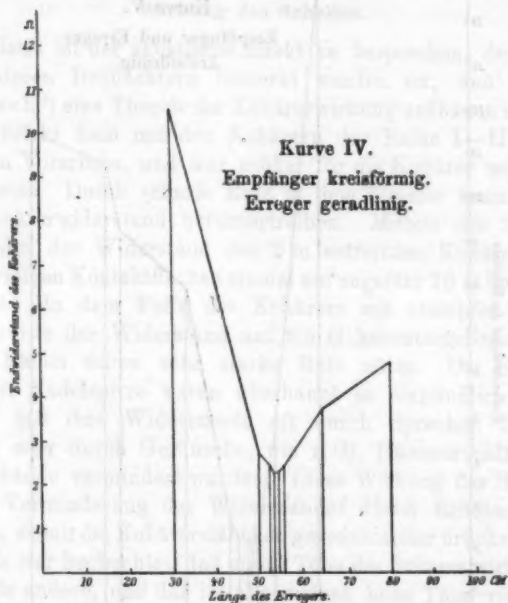
die Mittelwerte der Messungen des Endwiderstandes für die gegebene Länge. Im allgemeinen waren in jedem Falle zehn Messungen gemacht. Wo es anders war, ist die Anzahl der Messungen in Klammern beigefügt. Das Resultat der Bestimmung der kritischen Spannung des betreffenden Kohärers ist am Anfang der Kolonnen gegeben.

| | Reihe I | Reihe II | Reihe III | Reihe IV | Reihe V |
|--------------------|---------------------------------------|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| Kritische Spannung | $0,29 < p_c < 0,35$ | $0,34 < p_c < 0,35$ | $p_c = 0,40$ | $0,38 < p_c < 0,42$ | $0,43 < p_c < 0,47$ |
| Länge des Erregers | Mittelwerte des Endwiderstandes. Ohm. | | | | |
| cm | | | | | |
| 160 | 4,64 | — | — | — | — |
| 150 | 3,94 | — | — | — | — |
| 140 | 3,45 | — | — | — | — |
| 130 | 3,34 | — | — | — | — |
| 100 | 3,10 | — | — | — | 11,4 |
| 83,3 | — | — | — | — | 10,7 |
| 80 | 2,76 ₍₂₀₎ | — | 2,40 ₍₁₅₎ | 4,94 | 9,2 |
| 65 | — | — | — | — | 7,88 ₍₁₀₎ |
| 64 | 2,66 | 2,44 ₍₁₇₎ | 2,32 | 3,78 | — |
| 55 | — | — | — | 2,41 | 2,62 ₍₁₀₎ |
| 54 | — | — | — | 2,38 | — |
| 53 | 2,31 | — | — | 2,30 | 2,26 ₍₅₎ |
| 52 | — | — | — | 2,44 | — |
| 51 | — | — | — | — | 2,20 ₍₁₀₎ |
| 50 | 2,24 | 2,32 | 2,26 | — | 2,17 ₍₁₀₎ |
| 49,5 | 2,09 ₍₁₅₎ | 1,84 ₍₁₅₎ | 2,10 ₍₁₀₎ | 2,76 | — |
| 49 | 2,32 | 2,13 | 2,42 | — | 2,33 ₍₁₀₎ |
| 46 | 2,71 | 2,78 | — | — | — |
| 45 | — | — | — | — | 4,75 ₍₁₀₎ |
| 35 | 3,82 | — | 4,09 | — | 14,9 ₍₁₀₎ |
| 30 | — | — | — | 10,58 | — |
| 16 | 6,24 ₍₁₅₎ | 6,16 | 6,53 | — | — |

Die Kurven I—V stellen diese Resultate in leicht übersichtlicher Weise dar. Man sieht, daß die Resonanzstelle in Kurven I—III bei 49,5 cm liegt, in Kurve IV bei 53 cm oder



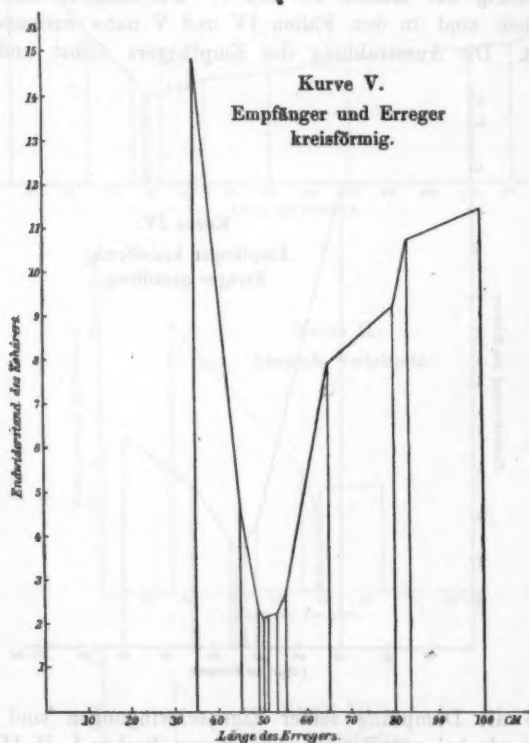
54 cm¹⁾ und in Reihe V bei 50 cm. Die Kurven I—III sind sehr ähnlich. Dagegen ist der Unterschied zwischen diesen Kurven und den Kurven IV und V, die einander gleich sind, sehr auffallend. Die Resonanz war viel ausgeprägter in der Anordnung der Reihen IV und V. Die äußeren Enden der Stäbchen sind in den Fällen IV und V nahe zusammen gebracht. Die Ausstrahlung des Empfängers selbst und dem-



gemäß die Dämpfung seiner Eigenschwingungen [sind damit kleiner als bei geradliniger Anordnung (Reihen I, II, III). In der Tat kann man diese kleinere Dämpfung in der ausgeprägteren Resonanz der Reihen IV und besonders V erkennen. Merkwürdig

1) Daß der kreisförmig gebogene Empfänger auf eine langsamere Erregerperiode resoniert, als ein geradliniger Empfänger von gleicher Länge, stimmt sehr gut mit dem in anderer Weise von Drude gefundenem Resultat (P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 609. 1902), daß der kreisförmig gebogene Empfänger eine um $6\frac{1}{2}$ Proz. größere Eigenperiode hat, als ein gleichlanger geradliniger Empfänger.

ist, daß die Endwiderstände in Reihe V nicht größer als in Reihe IV sind, obwohl man zu erwarten hat, daß der kreisförmige Erreger weniger stark als der geradlinige auf den Kohärer wirken werde.



Nebenbei ist zu bemerken, daß ein Vergleich der gefundenen kritischen Spannungen der Kohärer der Reihen I—III zeigt, daß ein Einfluß der Krümmung der Kontaktflächen auf den Wert der kritischen Spannung nicht zu konstatieren ist.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß die scheinbare Kapazität auch des von mir benutzten Kohärens (selbst bei Anwendung einer Nadelspitze) immer noch eine sehr große ist,

da annähernd der Kohärer einfach als leitende Brücke wirkt (d. h. scheinbare Kapazität unendlich groß), weil die Empfängerlänge im Resonanzfall annähernd mit der Erregerlänge übereinstimmt.

Abschnitt III. Der akustische Effekt.

Wirkung des Schalles.

Zuletzt ist der akustische Effekt zu besprechen, der schon von anderen Beobachtern bemerkt worden ist, und worauf Auerbach ¹⁾ eine Theorie der Kohärerwirkung aufbauen möchte. Dieser Effekt kam mit den Kohärern der Reihe I—III deutlich zum Vorschein, und war größer für die Kohärer mit einer Nadelspitze. Durch scharfe Rufe in dem Zimmer konnte man den Kohärerwiderstand heruntertreiben. Mittels der Stimme wurde also der Widerstand des 2 m entfernten Kohäfers mit kugelförmigen Kontaktflächen einmal auf ungefähr 70 Ω heruntergebracht. In dem Falle des Kohäfers mit stumpfer Nadelspitze wurde der Widerstand auf 8,8 Ω heruntergebracht. In beiden Fällen waren sehr starke Rufe nötig. Die Kohärer mit einer Nadelspitze waren überhaupt so empfindlich gegen Schall, daß ihre Widerstände oft durch Sprechen in dem Zimmer oder durch Geräusche, wie z. B. Hammerschläge, in dem Gebäude vermindert wurden. Diese Wirkung des Schalles ist der Verminderung des Widerstandes durch Erhöhung des Druckes, womit die Kohärerstäbchen gegeneinander drücken, ähnlich. Es war beobachtet, daß einige Töne der Stimme wirksamer waren als andere, und daß im allgemeinen hohe Töne viel eher als tiefe Töne eine Verminderung des Widerstandes verursachten. Die Vermutung war nicht weitliegend, daß ein Oberton der Stimme den longitudinalen Schwingungen der Kohärerstäbchen entsprach, daß dadurch die Stäbchen in Schwingung versetzt wurden, und daß die Kohärerenden näher zusammengedrängt wurden. Eine Spitze konnte die Oxydschicht leichter durchdringen, und die Kohärer mit Nadelspitze waren deshalb empfindlicher gegen Schall. Daß eine solche mechanische Wirkung immer im Sinne einer Verminderung des Widerstandes

1) F. Auerbach, Wied. Ann. 64. p. 611. 1898.

allein wirken sollte, wird nach der folgenden Tatsache nicht merkwürdig erscheinen. Es war nämlich bei der Einstellung des Kohärrers auf den gewünschten Wert des Anfangswiderstandes (vgl. p. 779) gefunden, daß durch Klopfen an das Holzbrett der Kohärerwiderstand größer, und durch Klopfen an die Glasröhre oder noch besser an die Schraubenzwingen, die die Glasröhre fest hielten, kleiner gemacht werden konnte. Der Widerstand konnte in dieser Weise ebensoweit herunter wie durch Schall gebracht werden. Man konnte in dieser Weise den Kohärerwiderstand, wenn der Kohärer frisch war, annähernd auf einen beliebigen Wert zwischen 50 Ω und 25 000 Ω einstellen. Die gebrauchten Werte des Anfangswiderstandes in den Reihen I—V lagen zwischen 850 Ω und 25 000 Ω (in Reihe I allein über 8000 Ω), und wurden in dieser Weise bekommen. Die Leichtigkeit dieser Einstellung, wie schon hervorgehoben worden ist, erlaubte ein Urteil über den Zustand des Kohärrers.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Vor dem Eintritt der Kohärerwirkung besteht der Widerstand eines Kohärrers in dem Widerstand einer zwischen den Kohärerenden liegenden, schlecht leitenden und unvollkommen elastischen Zwischenschicht, die zeitliche Nachwirkung zeigt. Die Zwischenschicht besteht gewöhnlich aus einer die Kontaktflächen bedeckenden Oxydschicht.

2. Legt man eine Potentialdifferenz, die kleiner als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden an, so findet eine elektrostatische Anziehung zwischen den Kohärerenden statt. Hierdurch wird die Dicke der Oxydschicht und damit der Kohärerwiderstand verkleinert. Wird die Potentialdifferenz weggenommen, so dehnt sich die Oxydschicht wegen ihrer Elastizität wieder aus, und der Kohärerwiderstand kehrt fast zu seinem ursprünglichen Wert zurück. In diesem Gebiete besteht eine lineare Beziehung zwischen der angelegten Spannung und dem Kohärerwiderstand.

3. Ist die angelegte Potentialdifferenz größer als eine gewisse Spannung, die *kritische Spannung*, so erfolgt Kohärerwirkung, d. h. eine mechanische Beanspruchung der Zwischen-

schicht tritt ein, der gegenüber sie nicht mehr genügende mechanische Festigkeit besitzt, und die inneren metallisch-leitenden Kohärerteile werden in Berührung gebracht. Der Kohärerwiderstand fällt daher auf einen kleinen Wert, den er dauernd behält. *Die Größe der kritischen Spannung hängt ab vom Druck der Kontaktstellen aufeinander, von der Natur und von der Dicke der Zwischenschicht.* Beim Eisen z. B., mit Oxydschicht an der Kontaktstelle, variierte die kritische Spannung zwischen 0,25 Volt und etwa 1 Volt.

4. Bei Versuchen mit einem Gleichstrom e fällt der Kohärerwiderstand beim Eintreten der Kohärerwirkung auf einen solchen Wert, daß die Spannung an den Kohärerenden sich auf einen ganz bestimmten Wert, *die Gleichgewichtsspannung*, einstellt. Dieser Prozeß wird erst nach einiger Zeit vollendet. Die Anlegung einer größeren Spannung bewirkt ein weiteres Sinken des Kohärerwiderstandes, sodaß die Gleichgewichtsspannung sich wieder einstellt. *Die Gleichgewichtsspannung hat für jedes Metall einen charakteristischen konstanten Wert.*

5. Besteht der Kohärer aus mehreren hintereinander liegenden Kontaktstellen, so ist die entsprechende Gleichgewichtsspannung der Zahl derselben proportional, die kritische Spannung dagegen nicht.

6. Einfallende elektrische Wellen verursachen eine Kohärerwirkung, die in ihrer Natur der durch einen Gleichstrom hervorgerufenen Wirkung vollkommen gleich ist.

7. Durch wiederholte Beanspruchung des Kohärrers auf Kohärerereffekt mittels elektrischer Wellen wird der Kohärer ermüdet, d. h. der Kohärer reagiert weder so regelmäßig noch so stark wie am Anfang. Diese Ermüdung liegt vermutlich in einer Verstärkung der die Kontaktflächen bedeckenden Oxydschicht.

8. Eine Empfängerleitung, die einen Kohärer enthält, hat eine bestimmte Eigenschwingung. Der Kohärer wirkt dabei als Leiter, oder als sehr große Kapazität, selbst wenn er nur eine sehr kleine Kontaktfläche (Nadelspitze-Kugelkalotte) hat. Es ist danach möglich, Erreger- und Empfängerleitung in Resonanz zu bringen. *Die Resonanz wird um so schärfer, je kleiner die Dämpfung der Eigenschwingungen des Empfängers und des Erregers ist.*

9. Kohärerwirkung kann auch durch Schall und auf mechanischem Wege hervorgerufen werden, nicht aber in so starkem Maße wie auf elektrischem Wege.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Drude, für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung im Verlaufe derselben meinen herzlichen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 6. April 1908.)

5. Über Volumenänderung von Gasen durch dielektrische Polarisation; von Richard Gans.

(Habilitationsschrift.)

I. Einleitung und Geschichtliches.

Die Frage, ob Gase die Erscheinung der Elektrostriktion zeigen, d. h. ob dieselben ihren Druck bez. ihr Volumen ändern, wenn sie in ein elektrisches Feld gebracht werden, ist schon Gegenstand experimenteller wie theoretischer Untersuchungen gewesen.

Zuerst griff Hr. Quincke¹⁾ das Problem experimentell an; er kam zu dem Resultate, daß, „wenn eine elektrische Volumenänderung bei Luft vorhanden ist, sie weniger als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$ des ursprünglichen Luftvolumens betragen müsse“. Bei Kohlensäure beobachtete Hr. Quincke eine relative Volumenverkleinerung im Betrage von $5 \cdot 10^{-10}$ für eine Potentialdifferenz von ca. 73 elektrostatischen Einheiten, „doch legt er bei der geringen Größe der Volumenänderung und der Schwierigkeit, zufällige Fehler auszuschließen, auf das Resultat dieser einen Versuchsreihe kein zu großes Gewicht“.

Theoretisch wurde der Fall von Hrn. Lippmann²⁾ behandelt. Dieser fand auf Grund des Energieprinzips und des von ihm formulierten Prinzips von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge, daß in einem gleichförmigen Felde von der Feldstärke E und der Dielektrizitätskonstante ϵ beim Drucke p die relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \frac{E^2}{p}$$

ist, ein Ergebnis, das, wie wir sehen werden, richtig ist.

Gegen diese Ableitung wendet sich Hr. Bos³⁾; er erklärt dieselbe für falsch und konstruiert einen Kreisprozeß, aus dem sich ergibt, daß das Volumen eines Gases von der elektrischen Feldstärke unabhängig ist. Ebenfalls zeigt Hr. Drude⁴⁾, daß

1) G. Quincke, Wied. Ann. 10. p. 513. 1880.

2) G. Lippmann, Ann. de chimie et phys. (5) 24. p. 145. 1881.

3) D. Bos, Groninger Inaugural-Dissertation 1888.

4) P. Drude, Physik des Äthers p. 301. Stuttgart 1894.

auf Grund der thermodynamischen Hauptsätze und der Maxwell'schen Theorie bei Gasen keine Elektrostriktion auftreten kann; er hält das Lippmann'sche Resultat für fehlerhaft, ohne den Fehler selbst anzugeben. Tatsächlich haben nun Hr. Bos und Hr. Drude bei den von ihnen konstruierten Kreisprozessen nicht alle Energieumsetzungen berücksichtigt, wodurch ihr Endresultat von dem meinigen abweicht; auf diesen Punkt werden wir später zurückkommen.

Hr. Pockels¹⁾ behandelt in einer sehr ausführlichen theoretischen Arbeit über Elektrostriktion auch den Fall der Gase und kommt durch Ableitung der Druckspannungen nach der Maxwell'schen Theorie zu demselben Resultat, welches Lippmann durch direkte Behandlung des Problems mit Hilfe des Energieprinzips gewonnen hat, nämlich, daß die Druckänderung

$$\Delta p = - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2$$

beträgt.

Wir sehen also, daß die theoretischen Ableitungen nicht miteinander übereinstimmen, und daß nur eine einzige experimentelle Versuchsreihe vorliegt, auf die ihr Autor selbst keinen allzugroßen Wert legt.

Bei dieser Lage der Dinge scheint es angebracht, das Problem noch einmal aufzunehmen und die Fragen zu stellen, ob nach der Maxwell'schen Theorie eine Volumenänderung der Gase durch dielektrische Polarisierung stattfindet, und ob die Versuche mit der Theorie übereinstimmen.

II. Theoretischer Teil.

Um die Kräfte im elektrostatischen Felde zu berechnen, wollen wir versuchen, die Abnahme der elektrischen Energie W bei einer unendlich kleinen virtuellen Verschiebung δs in der Form darzustellen

$$-dW = \int f \cdot \delta s \cdot d\tau.^2)$$

1) F. Pockels, Grunerts Archiv (2) 12. p. 57. 1894.

2) Wir werden hier und im folgenden uns der Schreibweise der Vektoranalysis bedienen, über die Näheres z. B. in H. Weber, Partielle Differentialgleichungen 1. p. 207. ff. zu finden ist.

Dann müssen wir f als die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft ansprechen, wenn $d\tau$ das Volumenelement des Feldes ist.

Wir setzen das Feld als vollständiges voraus, d. h. an der Oberfläche des betrachteten Raumes soll die Feldintensität Null sein.¹⁾

Bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung wird sich im allgemeinen in einem bestimmten Volumenelement $d\tau$ sowohl die Dielektrizitätskonstante ϵ ändern, als auch die in demselben vorhandene unendlich kleine Elektrizitätsmenge de .

Die Gesamtänderung dW der elektrischen Energie wird sich also darstellen lassen als die Summe der Änderung bei konstanter Dielektrizitätskonstante dW_ϵ und der Änderung bei konstanter Elektrizitätsverteilung dW_e .

Wir betrachten zuerst die Änderung der elektrischen Energie dW_ϵ bei konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ .

Ist die Elektrizitätsverteilung e und die Potentialverteilung φ im Felde vorhanden, so ist die Energie

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi e;$$

ist eine andere Elektrizitätsverteilung e' und die dazu gehörige Potentialverteilung φ' vorhanden, so ist die Energie

$$W' = \frac{1}{2} \sum \varphi' e'.$$

Also ist

$$W' - W = \frac{1}{2} \sum (\varphi' e' - \varphi e) = \frac{1}{2} \sum (\varphi + \varphi') (e' - e),$$

denn bei unveränderter Dielektrizitätskonstante ist²⁾

$$\sum e \varphi' = \sum e' \varphi$$

und folglich

$$dW_e = \sum \varphi \cdot \partial e = \int \varphi \cdot \partial \rho \cdot d\tau,$$

wo ρ die räumliche Dichte der Elektrizität bedeutet.

Wir kommen zur Berechnung der Energieänderung bei konstanter Elektrizitätsmenge, wir setzen also voraus

$$\rho = \rho',$$

d. h.

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{E}'.$$

1) Wegen der Art der Ableitung vgl. man E. Cohn, Das elektromagn. Feld p. 83. Leipzig 1900.

2) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 55

Nun ist

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho \, d\tau = \frac{1}{2} \int \varphi \rho' \, d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \varepsilon' \mathcal{E} \, d\tau,$$

$$W' = \frac{1}{2} \int \varphi' \rho' \, d\tau = \frac{1}{2} \int \varphi' \rho \, d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \varphi' \operatorname{div} \varepsilon \mathcal{E} \, d\tau.$$

Durch partielle Integration erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß das Feld als vollständiges vorausgesetzt wird,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon' \mathcal{E} \mathcal{E} \, d\tau,$$

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon \mathcal{E} \mathcal{E} \, d\tau,$$

also

$$W' - W = - \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon' - \varepsilon) \mathcal{E} \mathcal{E} \, d\tau$$

und

$$dW_0 = - \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 \cdot \partial \varepsilon \cdot d\tau.$$

Die Gesamtänderung wird also

$$dW = \int \varphi \cdot \partial \rho \cdot d\tau - \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 \cdot \partial \varepsilon \cdot d\tau.$$

Nun können wir aber annehmen, daß bei der Verschiebung die Elektrizitätsmengen auch auf den Leitern fest an der Materie haften¹⁾, also wird

$$\partial \rho = - \operatorname{div} (\rho \cdot \delta s).$$

Die Änderung der Dielektrizitätskonstante $\partial \varepsilon$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erstens aus dem Anteil wegen der Verschiebung der Materie

$$\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \delta s,$$

zweitens hänge die Dielektrizitätskonstante von der relativen Volumenänderung $\Delta v/v$ ab, und es sei

$$\Delta \varepsilon = - \alpha \frac{\Delta v}{v},$$

also kommt noch das Glied

$$- \alpha \operatorname{div} \delta s$$

hinzu, sodaß wir haben

$$\partial \varepsilon = \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \delta s - \alpha \operatorname{div} \delta s.$$

1) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 59.

Setzen wir diese Ausdrücke für $\partial \rho$ und $\partial \epsilon$ in den Wert von dW ein, so erhalten wir

$$dW = - \int \rho \operatorname{div} (\rho \delta s) d\tau - \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \operatorname{grad} \epsilon \cdot \delta s d\tau \\ + \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \alpha \operatorname{div} \delta s d\tau.$$

Durch partielle Integration, angewandt auf den ersten und letzten Term, ergibt sich

$$-dW = \int \rho \mathbb{E} \delta s d\tau + \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \operatorname{grad} \epsilon \cdot \delta s d\tau \\ - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} (\alpha \mathbb{E}^2) \delta s \cdot d\tau.$$

Es ist also die Kraft auf die Volumeneinheit

$$f = \rho \mathbb{E} + \frac{1}{8\pi} \mathbb{E}^2 \cdot \operatorname{grad} \epsilon - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} (\alpha \mathbb{E}^2)$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$f_x = \rho E_x - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \alpha E^2,$$

$$f_y = \rho E_y - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \alpha E^2,$$

$$f_z = \rho E_z - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \alpha E^2.$$

Im homogenen, nichtgeladenen Dielektrikum ist

$$\rho = 0$$

und

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0,$$

also

$$f_x = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \alpha E^2,$$

$$f_y = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \alpha E^2,$$

$$f_z = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \alpha E^2,$$

d. h. im Felde besteht ein Druck

$$p = p_0 - \frac{1}{8\pi} \alpha E^2,$$

wenn p_0 der Gasdruck außerhalb des Feldes ist.

1) Man vergleiche auch die Abhandlungen J. D. Korteweg, Wied. Ann. 9. p. 48. 1880; H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 385. 1881.

Zur Bestimmung von α benutzen wir Beobachtungen von Hrn. Boltzmann¹⁾ und Hrn. Klemenčič²⁾, nach welchen bei Gasen $\epsilon - 1$ sich proportional dem Druck ändert, was übrigens auch aus der Lorentz-Lorenzschen Gleichung folgt, die ausagt, daß $\epsilon - 1/\epsilon + 2$ dem Druck proportional ist. Da aber ϵ sehr wenig von 1 abweicht, können wir $\epsilon + 2$ konstant setzen.

Es ist also:

$$\epsilon - 1 = Cp,$$

d. h.

$$\frac{d(\epsilon - 1)}{\epsilon - 1} = \frac{dp}{p}.$$

Nach unserer obigen Definition ist aber

$$d\epsilon = d(\epsilon - 1) = \alpha \frac{dp}{p},$$

also ist

$$\alpha = \epsilon - 1,$$

und es ergibt sich

$$p = p_0 - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von Hrn. Lippmann.

Um die Abweichung des Drudeschen Resultates genau übersehen zu können, wollen wir die Formel aus einem Kreisprozeß ableiten, den bereits Hr. Drude³⁾ benutzt hat.

Das Gas vom Volumen v werde von einem Orte mit der Feldstärke E zu einem Orte mit der Feldstärke $E + dE$ gebracht, und zwar unter konstantem Volumen; dabei gewinnen wir die Arbeit⁴⁾

$$\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v dE^2.$$

Sodann dehne man das Gas bei konstanter Feldstärke $E + dE$ um dv aus, dabei leistet der Gasdruck die Arbeit

$$(p + dp)dv,$$

da wir annehmen wollen, daß im Felde $E + dE$ der Druck $p + dp$ herrscht.

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) 69. p. 795. 1874.

2) I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) 91. p. 712. 1895.

3) P. Drude, Physik des Äthers p. 301. Stuttgart 1894.

4) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 104 oder P. Drude, l. c. p. 294.

Der elektrische Druck an der Oberfläche des Gases leistet die Arbeit¹⁾

$$\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} (E^2 + dE^2) dv.$$

Jetzt werde das Gas bei konstantem Volumen $v + dv$ an den ursprünglichen Ort mit der Feldstärke E zurückgeschafft; dabei müssen wir die Arbeit leisten

$$\left[\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} v \right) dv \right] dE^2.$$

Beim Komprimieren auf das ursprüngliche Volumen leisten wir schließlich die Arbeit:

$$p dv + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2 dv.$$

Also ist

$$\begin{aligned} p dv + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2 dv + \left[\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} v \right) dv \right] dE^2 \\ = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} dE^2 \cdot v + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} (E^2 + dE^2) dv + (p + dp) dv. \end{aligned}$$

Die Glieder erster Ordnung heben sich fort; ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial v} (\varepsilon - 1) v = 0,$$

da nach Boltzmann und Klemenčič die Größe $\varepsilon - 1$ sich dem Druck proportional ändert, also bleibt übrig

$$\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} dE^2 dv + dp dv = 0,$$

d. h.

$$p = p_0 - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2,$$

also dasselbe Resultat, welches wir auf dem ersten Wege gefunden haben. Hr. Drude berücksichtigt nicht den elektrischen Druck an der Grenzfläche des Gases gegen das Vakuum.

Um dies Resultat auf eine bestimmte Versuchsanordnung anzuwenden, wollen wir einen Kugelkondensator annehmen, dessen äußere Kugelschale vom Radius r_2 auf das Potential φ_2 geladen sei, während die innere Kugelschale vom Radius r_1 das Potential φ_1 besitze.

1) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 98.

Dann ist die elektrische Feldintensität

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_2 - r_1} \frac{r_1 r_2}{r^2}.$$

Da diese im Kondensatorhohlraum mit dem Radius variiert, so müssen wir die Volumenänderung einer unendlich kleinen Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr berechnen und durch Integration die Gesamtänderung bestimmen.

Die unendlich kleine Volumenänderung ist

$$\frac{\Delta dv}{dv} = - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi p} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_2 - r_1} \right)^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^4},$$

wo p den Gasdruck bedeutet, also

$$\Delta dv = - \frac{\varepsilon - 1}{2p} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_2 - r_1} \right)^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} dr$$

und durch Integration zwischen den Grenzen r_1 und r_2

$$\Delta v = - \frac{\varepsilon - 1}{2p} \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

III. Experimenteller Teil.

„Die theoretisch berechnete Volumenänderung ist nun viel größer, als Hr. Quincke bei Kohlensäure gefunden hat und fällt sicher innerhalb der Grenze, die Hr. Quincke für die Wahrnehmbarkeit der Volumenänderung angibt“. ¹⁾

Unter diesen Umständen schien es angebracht, die Quinckeschen Experimente zu wiederholen und festzustellen, ob entgegen der Maxwellschen Theorie die Kontraktion durch dielektrische Polarisierung nicht vorhanden ist, oder die Gründe aufzufinden, aus welchen der Effekt Hrn. Quincke verborgen geblieben ist, zumal da ich glaubte, in einigen Punkten die Versuchsanordnung noch verbessern zu können, wozu hauptsächlich beitrug, daß ich im Besitze der Formel war, die mir gestattete, die Bedingungen so zu wählen, daß der zu erwartende Effekt möglichst groß würde.

Im wesentlichen behielt ich die Quinckesche Versuchsanordnung ²⁾ bei, da dieselbe viele Vorteile gegenüber anderen möglichen Anordnungen aufwies.

1) Vgl. D. Bos, l. c. p. 92.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 10. p. 513. 1880.

Der Apparat, den der Tübinger Institutsmechaniker G. Schurr angefertigt hat, war folgendermaßen konstruiert (vgl. Fig. 1).

Aus Kupferblech von 0,9 mm Dicke war eine Kugel von 15 cm Durchmesser hergestellt; diese war konzentrisch umgeben von einer ebenso dicken Kugelschale von 20 cm Durchmesser, welche von zwei Halbkugeln gebildet wurde wie bei den Magdeburger Halbkugeln. Die Ränder der Halbkugeln waren nach außen umgebogen und durch darangelötete Messingringe verstärkt. Die umgebogenen Ränder wurden aufeinander geschliffen, sodaß sie mit etwas Fett vollkommen dicht hielten.

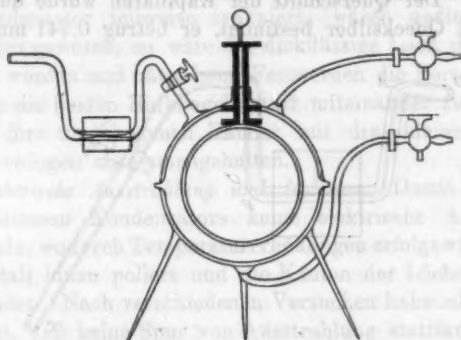


Fig. 1.

Die innere Kugel hing an einem 5,7 mm dicken Messingdraht von 10 cm Länge, auf den oben eine polierte Messingkugel von 3 cm Durchmesser aufgesetzt war; dieser Draht durchsetzte die Kuppe der oberen Halbkugel, in welche ein Loch von 11 mm Durchmesser gebohrt war. Von außen war eine Messinghülse von demselben Durchmesser um das Loch herumgelötet, ihre Länge betrug 2,6 cm. In diese konnte ein Hartgummrohr von 8,3 cm Länge mit Schellack eingekittet werden. Das Rohr reichte bis auf die innere Kugel, sodaß der durch dasselbe hindurchgeführte und mit Schellack eingekittete Draht der inneren Kugel von der äußeren Kugel vollständig isoliert war.

In die obere Halbkugel war ferner ein Loch von 1 mm Durchmesser gebohrt; außen war um das Loch herum eine Messinghülse von 8 mm Durchmesser aufgelötet. In diese konnte das Manometer eingekittet werden, welches unten be-

schrieben werden wird. Außerdem waren diametral einander gegenüber in die obere und die untere Halbkugel 8 mm weite Löcher gebohrt, an die von außen Messingrohre eingesetzt waren, die in Gashähne endigten. Dieselben dienten dazu, Gase in den Kondensator hineinzuleiten.

Das Manometer. Mit dem Hohlraum verbunden war ein Glasapparat, wie ihn Fig. 2 darstellt.

BC ist ein weiteres Glasrohr mit einem Glashahn *H*, an dieses ist eine U-förmig gebogene Kapillare mit dicker Wand *BEA* angeschmolzen, bei *A* ist wieder ein weiteres Glasrohr *AD* angesetzt. Der Querschnitt der Kapillaren wurde durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt, er betrug $0,341 \text{ mm}^2$.

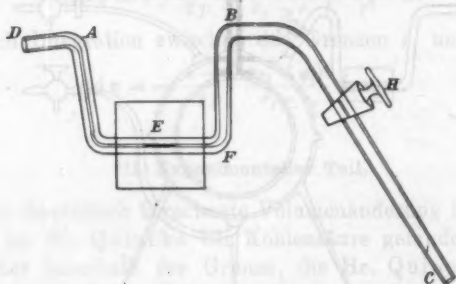


Fig. 2.

Um eine gute Beweglichkeit zu gewährleisten, war die Kapillare mit heißer konzentrierter Schwefelsäure, der ein paar Tropfen Salpetersäure zugesetzt waren, gründlich ausgespült, sodann wurde mit destilliertem Wasser nachgespült und getrocknet.

Dann wurde ein Tropfen Toluol in die Kapillare gebracht, dessen Länge zwischen 8 und 10 mm differierte. Vor der eigentlichen Messung wurde dieser Tropfen ein paarmal durch die Kapillare getrieben, damit gute Benetzung stattfand.

Die Verschiebung des Tropfens wurde mit einem Horizontalmikroskop mit Okularmikrometer beobachtet; 1 Skt. des Okularmikrometers betrug $0,0132 \text{ mm}$.

Damit die Tropfenkuppe deutlich durch das Mikroskop beobachtet werden konnte und die zylindrische Wölbung der dicken Kapillare die optische Abbildung nicht störte, wurde

bei *E* (Fig. 2) eine planparallele Glasplatte mit Kanadabalsam angekittet, wodurch das Bild tadellos scharf erschien. Um die Kapillare bei *E* horizontal stellen zu können, stand der ganze Kondensator auf einem Tischchen mit drei Stellschrauben.

Dichtung. Wie schon erwähnt, wurden die beiden Halbkugeln mit etwas Fett aufeinandergesetzt, wodurch dort vollkommene Dichtung erreicht wurde, und zwar wurde nach Hrn. Röntgen ein Gemisch von Wachs und Vaseline genommen, welches den Vorteil hat, wenig Dämpfe abzugeben.¹⁾

Um sicher zu sein, daß die verschiedenen Lötstellen dicht waren, wurden dieselben mit Kopallack bestrichen und dann der Kondensator teilweise evakuiert; wären undichte Stellen vorhanden gewesen, so wäre der dickflüssige Lack dort hineingesogen worden und hätte beim Festwerden die Poren verstopft.

Um die beiden Halbkugeln starr miteinander zu verbinden, wurden ihre umgebogenen Ränder mit drei kleinen Messingschraubzwingen zusammengehalten.

Elektrische Ausstrahlung und Isolation. Damit im Innern des geladenen Kondensators keine elektrische Ausstrahlung stattfände, wodurch Temperaturerhöhungen erfolgt wären, wurde das Metall innen poliert und die Kanten der Löcher sorgfältig abgerundet. Nach verschiedenen Versuchen habe ich es so weit gebracht, daß keine Spur von Ausstrahlung stattfand, die man durch die Bewegung des Manometertropfens sofort konstatieren konnte.

Um die äußere Kugel von dem Messingdraht an der inneren Kugel zu isolieren, wurde nach Quinckes Vorgang ein gut isolierendes Glasrohr auf beiden Seiten mit geschmolzenem Schellack überzogen und in die Hülse an der Kuppe des Apparates eingekittet, doch fand im Innern immer Ausstrahlung statt, und die Isolation war nicht befriedigend, sodaß ein Funke immer an der Oberfläche dieser Glasröhre im Innern übersprang, und zwar, wie bei Quincke, bereits bei einer Potentialdifferenz von 70 bis 80 elektrostatischen Einheiten.

Da das Quadrat der Feldstärke in die oben abgeleitete Formel eingeht, lag es mir daran, die Potentialdifferenz möglichst zu vergrößern.

1) Vgl. F. Kohlrausch, Praktische Physik 8. Aufl. p. 34. 1896.

Mit einem gut polierten Hartgummirohr kam ich schon etwas weiter (bis ca. 90 C.G.S.). Dann ließ ich mir in das Hartgummirohr unten ein Gewinde schneiden, auf welches kreisförmige Hartgummiplatten von 2,4 mm Dicke und 7 cm Durchmesser so aufgeschraubt wurden, daß die eine unmittelbar über der inneren Kugel am Drahtansatz saß, während die andere ganz oben die äußere Kugel fast berührte. Jetzt hatte ich schon 12 mm Schlagweite erreicht, die auf ca. 18 mm stieg, als ich das Gewinde des Hartgummirohres und die Hartgummiplatten erwärmte und warm zusammenschraubte, sodaß die einzelnen Teile zusammenfließen konnten.

Sehr wichtig für gute Isolation war auch, daß die Luft oder Kohlensäure im Kondensator mit konzentrierter Schwefelsäure und Chlorcalcium vollständig getrocknet war.

Beweglichkeit des Tropfens. Waren die Hähne des Kondensators geschlossen und der Tropfen gut beweglich, so war er gegen Luftdruckänderungen sehr empfindlich, auch wenn der in Watte eingepackte und in einer Holzkiste verborgene Kondensator gegen Temperaturdifferenzen gut geschützt war.

Der Tropfen bewegte sich fortwährend in der Kapillare hin und her, und zwar um viel mehr, als die Verschiebung durch die zu suchende Druckänderung nach der Formel betragen konnte.

Wie schon Hr. Quincke feststellte, kam das hauptsächlich von der variablen Windstärke vor dem Fenster, in dessen Nähe der Apparat stand. Die Beweglichkeit war so groß, daß man es deutlich an der Verschiebung des Tropfens merken konnte, wenn im selben Stockwerk eine Tür auf- oder zugeschlagen wurde.

Hr. Quincke machte sich frei von diesen Schwankungen, indem er das horizontale Manometerrohr so weit neigte, bis durch den hydrostatischen Druck der Flüssigkeit die Wirkung unmerklich war. Das konnte ich nicht tun, da wegen der Größe der unbeabsichtigten Bewegungen der ganze Effekt mit verborgen worden wäre.

Unempfindlicher durfte ich die Methode nicht machen, sondern ich mußte die schädlichen Druckänderungen in der Atmosphäre selbst eliminieren. Dies geschah dadurch, daß an die offene Seite des Manometers ein geschlossenes Gefäß angesetzt wurde.

Dadurch wird allerdings die Methode ein wenig unempfindlicher, denn durch die Druckänderung im Schutzgefäße wird die Verschiebung verkleinert. Bezeichnen wir das Volumen des Kondensators mit v_1 , das des Schutzgefäßes mit v_2 , so wird durch die Druckzunahme im demselben bei gegebener einseitiger Druckänderung die Tropfenverschiebung im Verhältnis $v_2/v_1 + v_2$ verkleinert, damit dies möglichst wenig ausmacht, muß v_2 so groß wie möglich sein.

Ich wählte einen Glasballon von 36,6 Liter Inhalt, während der Kondensator 2,42 Liter enthielt. Dadurch wurde die Verschiebung nur im Verhältnis 0,938 verkleinert.

Dieser mit trockener Luft gefüllte Ballon blieb in dem Korb, in dem sich die Säureballons beim Transport befinden, und der herausragende Teil wurde in Watte gehüllt. Durch einen Hahn konnte er mit der Atmosphäre in Verbindung gesetzt werden.

Da die Temperatur im Kondensator und im Schutzballon nicht dieselbe war, so trat der Tropfen häufig teilweise in den senkrechten Teil der Kapillare, bis durch den hydrostatischen Druck Gleichgewicht eingetreten war; dort verlor er dann aber an Beweglichkeit. Deshalb wurde an einem geeigneten Orte im Zimmer ein Argandbrenner aufgestellt und durch Regulierung der Flammenhöhe und der Entfernung von den Versuchsanordnungen ein solches Temperaturgefälle erzeugt, daß das ursprünglich vorhandene gerade kompensiert wurde.

Manchmal dauerte es Stunden lang bis dies eintrat, aber es war immer zu bewerkstelligen, daß wenigstens für einige Minuten der Tropfen im horizontalen Teile der Kapillaren (bei E in Fig. 2) sich in Ruhe befand; dann mußten die Messungen schnell vorgenommen werden.

Messung der elektrischen Druckänderung. Fig. 3 gibt schematisch die Versuchsanordnung. A ist der Argandbrenner, S der Schutzballon, C der Kondensator mit dem Manometer M , St ein Stanniolschirm, der den Tropfen vor direkten Einwirkungen der Influenzmaschine und der geladenen Teile schützen sollte, Mi das Mikroskop zur Beobachtung der Tropfenverschiebung, J die Influenzmaschine, von deren einem Pole aus ein 8 mm dicker Draht D ausgeht, der in eine Kugel K_1 endet, die die Kugel K_2 vollkommen berührt. Der andere

Pol der Maschine sowie die äußere Kugel des Kondensators sind geerdet (Gasleitung). Drehte man die Maschine, so wuchs die Potentialdifferenz, bis dieselbe sich durch einen Funken wieder ausglich. Der Tropfen mußte also langsam sich in der einen Richtung bewegen, entsprechend einer Volumenabnahme und plötzlich wieder in entgegengesetzter Richtung sich ver-

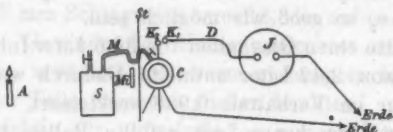


Fig. 3.

schieben. Die Maschine wurde langsam gedreht, sodaß das Potential erst allmählich anwuchs, und nach der Entladung wurde die Funkenstrecke durch einen Auslöser überbrückt, damit die Garantie vorhanden war, daß kein elektrisches Feld mehr existierte.

Die Potentialdifferenz wurde aus der Funkenlänge nach den von Hrn. Paschen und von Hrn. Heydweiller¹⁾ gefundenen Werten durch Interpolation berechnet.

1. *Beobachtungsreihen.* Um noch einmal zusammenzustellen, ist:

$$\Delta V = - \frac{\epsilon - 1}{2p} \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

Für Luft ist

$$\epsilon - 1 = 59 \cdot 10^{-6}.$$

Bei Atmosphärendruck ist $p = 10^6$.

$r_1 = 7,5$ cm, der Kapillarenquerschnitt $0,341$ mm²,

$r_2 = 10$ cm, die Mikroskopvergrößerung $0,0132 \frac{\text{mm}}{\text{Skt.}}$,

$$\frac{r_2}{v_1 + v_2} = 0,938.$$

Also ist die für 100 elektrostatische Einheiten theoretisch berechnete Verschiebung $18,4$ Skt.

1) Man vgl. die Zusammenstellung bei A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 213. 1893.

Die Beobachtung ergab in zwei Fällen:

| Pot.-Diff. [C.G.S.] | Theor. Verschiebung in Skt. | Beob. Verschiebung in Skt. | Beob. Verschiebung Mittel |
|------------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 115 | 24 | 1,0—1,5 | 1,25 |
| 119 | 26 | 0,9—1,2 | 1,05 |

Wie man sieht, stimmt die beobachtete Verschiebung auch nicht annähernd mit der berechneten überein. Es lag nahe, zu vermuten, daß das Manometer die Druckänderung infolge der Reibung nicht richtig anzeigt.

Der Druckapparat. Um dies zu prüfen, konstruierte ich mir eine Vorrichtung, mit der ich willkürlich im Kondensator eine Druckänderung hervorrufen konnte, die der berechneten an Größe gleich war. Diesen Apparat will ich der Kürze wegen im folgenden einfach als Druckapparat bezeichnen.

Zu dem Zweck verband ich ein Glasrohr, welches in der Mitte aus einer dickwandigen Kapillaren bestand, während die Enden aus weiten Röhren hergestellt waren, an dem oberen Ende durch einen Gummischlauch mit dem einen Hahn des Kondensators, während das untere Ende durch einen Gummischlauch mit einem weiten Glasrohr verbunden war. Dieses weitere Glasrohr war mit Hilfe einer Mikrometerschraube auf- oder abwärts zu bewegen.

Füllte man das weitere Rohr mit Quecksilber, bis die Quecksilberkuppe in der Kapillaren stand, so konnte man nach dem Prinzip des Jollyschen Luftthermometers durch Verschieben des weiteren Schenkels den Stand in der Kapillaren variieren.

Der Querschnitt der Kapillaren betrug $0,449 \text{ mm}^2$.

Es war aber nicht möglich, den Stand in der Kapillaren, der mit einem zweiten Mikroskop beobachtet wurde, willkürlich zu verändern oder konstant zu halten. Wahrscheinlich traten bei der kleinsten Bewegung der Quecksilberkuppe elektrische Ladungen auf, die die Oberflächenspannung veränderten. Erst als ich das Quecksilber nur im weiten Teile des Glasrohres hatte und darauf ein wenig Toluol goß, das in die Kapillare hineinreichte, erhielt ich brauchbare Verhältnisse.

Die Mikroskopvergrößerung des zweiten Mikroskopes betrug $0,0104 \text{ mm/Skt.}$

Es ergab sich nun folgendes aus zwei Beobachtungen an verschiedenen Tagen.

| Verschiebung am Druckapparat in Skt. | Mittel | Verschiebung am Manometer | | |
|--|--------|---------------------------|------------|--------|
| | | Berechnet | Beobachtet | Mittel |
| 23—25 | 24,0 | 25 | 1,4—1,8 | 1,60 |
| 22—25 | 23,5 | 24 | 1,2—1,7 | 1,45 |

Hieraus ergibt sich im Mittel

$$\frac{\text{Beob.}}{\text{Ber.}} = 0,062.$$

Beobachtungen und Berechnungen. Multiplizieren wir mit diesem Werte 0,062 die „theoretische Verschiebung“ der ersten Tabelle, so erhalten wir:

| Pot.-Diff. in C.G.S. | Theor. Verschiebung in Skt. | | Beob. Verschiebung in Skt. | |
|-------------------------|-----------------------------|-------|----------------------------|-----------|
| | unkorr. | korr. | | Im Mittel |
| 115 | 24 | 1,48 | 1,0—1,5 | 1,25 |
| 119 | 26 | 1,61 | 0,9—1,2 | 1,05 |

Wir sehen, daß jetzt die korrigierten theoretischen Werte mit den beobachteten schon viel besser übereinstimmen.

Dann wurden drei Versuchsreihen mit trockener Kohlensäure angestellt. Hier ist eine größere Verschiebung zu erwarten, da $s-1 = 96 \cdot 10^{-5}$ als Mittel der Beobachtungen der Herren Boltzmann und Klemenčič ist.

Die Versuche ergaben:

| Pot.-Diff. in C.G.S. | Theor. Verschiebung in Skt. | | Beob. Verschiebung in Skt. | |
|-------------------------|-----------------------------|-------|----------------------------|--------|
| | unkorr. | korr. | | Mittel |
| 79,5 | 19 | 1,2 | 0,7—0,8 | 0,75 |
| 70,0 | 15 | 0,9 | 0,6—0,7 | 0,65 |
| 79,5 | 19 | 1,2 | 0,7—0,9 | 0,80 |

Bei den kleinen Verschiebungen ist eine bessere Übereinstimmung kaum zu erwarten.

Wir sehen also, daß die Reibungskräfte in den engen Kapillaren bewirken, daß nicht die volle Verschiebung zu stande kommt.

Um dies zu stützen, wurde ein neues Manometer konstruiert, dessen Kapillarquerschnitt viel größer war als beim ersten, nämlich $1,875 \text{ mm}^2$ betrug. Ferner war das Stück *BF* (vgl. Fig. 2) noch aus weitem Rohr gefertigt, während dies bei dem ersten Manometer aus Kapillarrohr bestand, und schließlich wurde das Loch, welches das Manometer mit dem Innenraum des Kondensators, verband von 1 mm Durchmesser auf 3 mm erweitert.

Es ergab sich:

| | Verschiebung am Druck- apparat in Skt. | Verschiebung am Manometer in Skt. | | |
|-------|---|-----------------------------------|------------|--------|
| | Mittel | Berechnet | Beobachtet | Mittel |
| 21—26 | 23,5 | 4,4 | 2,0—2,8 | 2,4 |
| 22—28 | 25,0 | 4,6 | 2,0—2,5 | 2,2 |

Beob. = 0,51 im Mittel ist also schon ein viel günstigerer Wert.
Ber.

Um zu sehen, ob die Verschiebung am Druckapparat der Tropfenverschiebung im Manometer proportional ist, wurden folgende Messungen gemacht.

| | Verschiebg. am Druckapparat in Skt. | Verschiebg. am Manometer in Skt. | |
|-------|-------------------------------------|----------------------------------|--------|
| | Mittel | | Mittel |
| 22—26 | 24 | 1,9—2,6 | 2,2 |
| 45—55 | 50 | 4,6—5,0 | 4,8 |

Ungefähr findet also Proportionalität statt.

Die Beobachtungen ergaben:

| Gas | Pot.-Diff. in C.G.S. | Theor. Verschiebung in Skt. | | Beob. Verschiebung in Skt. | |
|-----------------|-------------------------|--------------------------------|-------|-------------------------------|--------|
| | | unkorr. | korr. | | Mittel |
| Luft | 148 | 7,33 | 3,7 | 3,6—3,9 | 3,7 |
| " | 148 | 7,33 | 3,7 | 4,2—4,5 | 4,3 |
| " | 115 | 4,42 | 2,3 | 1,8—2,0 | 1,9 |
| " | 115 | 4,42 | 2,3 | 1,5—1,8 | 1,6 |
| CO ₂ | 147 | 11,8 | 6,0 | 5,0—5,6 | 5,3 |
| " | 115 | 7,2 | 3,7 | 2,0—3,3 | 2,7 |

Daß die beobachteten Verschiebungen einer Druckänderung im Kondensator entsprachen, erkannte ich daran, daß sie nicht eintraten bei offenem Kondensatorhahn.

Es wäre das Beste gewesen, die elektrische Druckänderung durch die des Druckapparates zu kompensieren und so eine Nullmethode zu schaffen, doch war das zu kompliziert, vor allen Dingen, da es zu lange Zeit zur einzelnen Messung in Anspruch genommen hätte.

Zusammenfassung. Aus vorliegender Arbeit folgt, daß nach der Maxwellschen Theorie die Druckänderung eines Gases durch dielektrische Polarisierung ($\epsilon - 1/8\pi$) E^2 beträgt. Die Drudesche Ableitung ergibt keine Druckänderung, weil nicht alle Energieumsetzungen berücksichtigt sind. Experimentell ist gezeigt, daß der theoretisch geforderte Effekt der Größenordnung nach vorhanden ist, von Quincke jedoch nicht gefunden wurde, weil er durch den hydrostatischen Druck der Manometerflüssigkeit seine Methode zu unempfindlich gemacht hat, und weil in der engen Kapillaren eine zu große Reibung stattfand.

Tübingen, Physik. Inst., 9. März 1903.

(Eingegangen 14. März 1903.)

6. *Darstellung des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien, und insbesondere ihrer Richtungsänderungen durch Dielektrika;*
 von Max Seddig.

(Hierzu Taf. IV, Figg. 1—9.)

(Auszug aus der Marburger Dissertation, 1902.)

Die Aufgabe der vorliegenden, rein experimentellen Untersuchung war: eine Methode zu finden zur *Demonstration des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien* und diesen Linienverlauf unter verschiedenen Verhältnissen experimentell darzustellen; insbesondere aber das *Einbiegen* der elektrischen Kraftlinien in ein *Dielektrikum* zu zeigen, das eine höhere Dielektrizitätskonstante hat als das umgebende Medium. —

Auf Veranlassung des Hrn. Prof. Dr. Richarz hatte schon 1899 Hr. Dr. W. Starck in Greifswald Versuche zur elektrischen Kraftliniendarstellung unternommen, und zwar ausgehend von dem Gedanken, daß *pyroelektrisch* gemachte und auf solche Weise mit „Dipolen“ versehene Kristallnadelchen sich im elektrostatischen Felde in die Richtungen der Kraftlinien einstellen müßten. Es wurde daher zuvor erwärmtes Turmalinpulver auf eine gut isolierende Unterlage (Glas, Hartgummi) aufgestreut und zwischen den beiden auf der Unterlage aufsitzen den Elektroden das elektrische Feld erregt. Die Turmalinpartikelchen ordneten sich dann einigermaßen deutlich zu Kraftlinien an. Die Anordnung in Linien trat jedoch auch ohne Vorwärmen des Turmalinpulvers ein; die künstliche Erzeugung von „Dipolen“ durch Pyroelektrizität war also unnötig. Offenbar erfolgt die Einstellung, das „Richten“ der Partikelchen nach dem Prinzip des kleinsten Widerstandes; denn sofern die suspendierten Teilchen eine höhere Dielektrizitätskonstante als die Umgebung haben, werden sie mit ihrer Längsrichtung in die Richtung der elektrischen Kraftlinien gedreht, sodaß diese

in möglichst gut „dielektrisch polarisierbaren“ Bahnen verlaufen. — Oder in der Sprache der Fluida: das *eine* Ende der Partikelchen wird positiv, das *andere* negativ-elektrisch polarisiert, sodaß die Einstellung dieses nun mit „Polen“ versehenen Teilchens ebenso erfolgt, wie diejenige einer kleinen Magnetnadel im magnetischen Felde; außerdem findet in Richtung der Kraftlinien, wo ja jedesmal positive und negative Pole der gerichteten Partikelchen einander gegenüberstehen, eine *Anziehung*, und senkrecht zu den Kraftlinien, wegen des Benachbartseins gleichnamiger Pole, eine *Abstoßung* der Teilchen untereinander statt, wodurch dann Veranlassung zur Bildung einzelner, voneinander getrennt liegender *Linien* gegeben ist. —

Neben den oben erwähnten Darstellungsversuchen mittels Turmalinpulver, sind noch eine Reihe anderer Methoden versucht worden, von denen besonders diejenigen von W. Holtz¹⁾, W. v. Bezold²⁾, L. Chapman³⁾, W. Weiler⁴⁾, V. Boccara⁵⁾, D. Robertson⁶⁾ und V. Schaffers⁷⁾ zu nennen sind; über sie ist in der Marburger Dissertation referiert.

Nachdem Hr. Dr. W. Starck wegen Übernahme anderer Arbeiten obige Versuche aufgeben mußte, veranlaßte Hr. Prof. Dr. F. Richarz den Verfasser dieser Arbeit zur weiteren Behandlung dieses Themas, worüber im folgenden berichtet wird.

Unter den in Frage kommenden Methoden wurde für die vorliegende Untersuchung, deren Aufgabe es war, den *Verlauf der elektrischen Kraftlinien* unter den verschiedensten Verhältnissen, insbesondere aber das *Einbiegen* dieser Linien in ein Dielektrikum von höherer Konstante zu zeigen, als diejenige des umgebenden Mediums ist, die *Methode der Suspensionen*

1) W. Holtz, Mitt. aus dem naturw. Verein von Neuvorpommern und Rügen, p. 57—77. 1880.

2) W. v. Bezold, Wied. Ann. 21. p. 401—409. 1884.

3) L. Chapman, Electr. Rev. 24. p. 688. 1889; Lum. élect. 33. p. 297. 1889.

4) W. Weiler, Zeitschr. f. physikal. u. chem. Unterr. 6. p. 194 bis 195. 1893.

5) V. Boccara, Nuovo Cim. (4) 8. p. 406—408. 1898.

6) D. Robertson, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 22. p. 361—365. 1898/99.

7) V. Schaffers, S.J., Les Plaques sensibles au champ électrostatique. A. Herman, Paris 1900.

gewählt; einmal weil sie als die vielseitigste und als die empfindlichste erschien, da bei ihr die zu richtenden Teilchen am leichtesten beweglich sind, und dann, weil nach den Holtz'schen Versuchen (vgl. p. 816, Anm. 1) zu vermuten war, daß bei Vervollkommnung der Versuchsanordnung und bei geeigneter Suspension gut ausgebildete, gleichförmige Linienbilder sich würden herstellen lassen, ähnlich jenen, die wir bei den magnetischen Kraftlinien zu sehen gewohnt sind.

Prinzipiell ist die Suspensionsmethode folgende: in eine mit der betreffenden Suspension (bestehend aus einer *nicht-leitenden* Flüssigkeit, in welcher feine, nichtleitende Partikelchen aufgeschwemmt sind) gefüllte, gut isolierende Schale tauchen, den Boden berührend, zwei Elektroden ein, die mit den Polen einer Influenzmaschine in Verbindung stehen. Durch langsames, *gleichmäßiges* Drehen der Influenzmaschine wird zwischen den Elektroden ein elektrostatisches Feld erregt, in welchem dann die suspendierten Partikelchen sich in die Richtung der elektrischen Kraftlinien einstellen und, so *gerichtet, sedimentieren* unter Bildung von Linienwülsten.

A. Methode: Suspensionen in Terpentinöl.

1. Allgemeines. Geeignete Pulver.

Als *flüssiges Dielektrikum* wurde bei den ersten Versuchen Terpentinöl benutzt, das sich aber auch bei den weiteren als das Bestgeeignete erwies; denn all die anderen, sonst gebräuchlichen flüssigen Dielektrika haben teils zu hohe Leitfähigkeit (Petroleum, Benzol), teils zu große Viskosität (Vaselinöl, Glycerin, Olivenöl). Auch vom Terpentinöl ist nur das *vollkommen reine, wasserfreie* und absolut farblose (das doppelt rektifizierte der Apotheken) gut brauchbar. — *Mischungen* gaben keine brauchbaren Resultate.

Da nach diesen Erfahrungen sich die Brauchbarkeit der Suspension nur durch geeignete *Wahl des zu suspendierenden Pulvers* zu erwarten war, so wurde eine große Zahl von Pulvern unter den verschiedensten Bedingungen daraufhin untersucht; hauptsächlich aber folgende, gut getrockneten Pulver von:

| | |
|---|--------------|
| Holz (Nußbaum, Mahagoni, „Wurmmehl“) | Sand |
| Hartgummi | Lykopodium |
| Siegellack | Oxalsäure |
| Schellack | Salol |
| Kork | Braunstein |
| Glas | Chininsulfat |
| Graphit | Glycin |
| Schmirgel | u. a. |

Die meisten von ihnen waren polar unterschiedlich, d. h. die Linien bildeten sich immer nur an *einem*, für jede Substanz aber charakteristischen Pole leidlich aus; manche verhielten sich vollkommen indifferent (z. B. Schwefel, Lykopodium), ohne eine Spur von Linienbildung zu geben, und nur drei erwiesen sich (abgesehen von „Leitern“ wie z. B. Holzkohlepulver) als gut brauchbar:

1. Holzpulver
2. Chininsulfat
3. Glycin

und zwar letzteres in ganz vorzüglicher Weise. — Während z. B. bei *Chininsulfat* eine bevorzugte Ansammlung am — Pol statthat, zeichnet das *Glycin*¹⁾ Bilder von fast vollkommener Gleichmäßigkeit und Linien von außerordentlicher Feinheit. — Suspensionen von Chininsulfat haben aber den Vorteil, wiederholt, für 8—10 Versuche, selbst während mehrerer Tage, brauchbar zu bleiben, wogegen Glycin in Suspension sehr rasch verdirbt und für gewöhnlich nur zu einem *einzigen* Versuche verwendbar ist; außerdem hat Glycin den kleinen Nachteil, daß es für den Versuch durch Musselin gebeutelt werden muß, wegen seiner sehr ungleichen Korngröße. Für alle diejenigen Fälle aber, in denen Linien größter Präzision erforderlich sind, z. B. bei Projektionsversuchen (vgl. p. 831) und Herstellung von Linienbildern in kleineren Dimensionen, ist Glycin das einzig brauchbare suspendierte Mittel; und schließlich ist bei Glycin die Linienbildung in sehr kurzer Zeit, in 3—5 Min., beendet, während bei Chininsulfat 15 Min. und mehr erforderlich sind.

1) Glycin (für vorliegende Zwecke am besten das Fabrikat der Akt.-Ges. f. Anilin-Fabr.), erhältlich in den photographischen Handlungen.

2. Herstellung der Suspension. Bedingungen für gute Linienausbildung.

Die Herstellung einer Suspension, die am besten in einem Becherglase, *keinesfalls* aber in der für den Versuch bestimmten Schale vorzunehmen ist, geschieht unter gründlichem Umrühren mit einem Glasstabe (in der für den Versuch bestimmten Schale würden sich die vom Glasstabe berührten Stellen des Bodens nachher bei der Kraftlinienerzeugung als Strichmarken störend bemerkbar machen!) Zum Suspendieren sind nur geringe Mengen des betreffenden Pulvers erforderlich, ca. $0,5\text{ g}$ pro 100 cm^3 Terpentinöl; nach kurzer Übung lassen sich solche Suspensionen auch leicht ohne Abwägen, „nach Gefühl“ herstellen, besonders da ein zu viel oder zu wenig leicht an der zu großen oder geringen Bilddichte erkennbar ist; die fertige Suspension hat beim Umrühren leicht „wolkig“ auszusehen; sie wird nach einem letzten, kräftigen Aufrühren in einem Zuge in die für den Versuch bestimmte Schale gegossen. Über die anzuwendende Suspensionsmenge, die abhängig ist von der Art der Schale etc. vgl. p. 821.

Die Linienbildung ist beendet, wenn die überstehende Flüssigkeit vollkommen „klar“ geworden ist; ein vorzeitiges Nachlassen der dielektrisch polarisierenden Kraft ist also zu vermeiden, da sonst auch *nicht* gerichtete Partikelchen sedimentieren, sich über die gerichteten lagern und auf diese Weise das Linienbild verschwommen machen.

Erschütterungen stören ganz außerordentlich die Regelmäßigkeit und Schärfe der Linien, und sind daher peinlich zu vermeiden; nur auf ganz besonders festen, schweren Tischen kann ohne Störung Influenzmaschine und die für die Linienbildung bestimmte Schale zusammen stehen; in allen anderen Fällen ist für beide je ein besonderer Tisch, oder für die Schale am besten eine Wandkonsole zu benutzen, damit auch die durch das Gehen im Zimmer verursachten Vibrationen keinen Einfluß haben können. — Ferner dürfen keine Metallmassen oder sonstige Leiter sich in der Nähe des erzeugten elektrostatischen Feldes befinden, da sie dort sonst analoge Störungen hervorbringen, wie Eisenmassen im magnetischen.

3. Elektrizitätsquelle.

Deutliche Bildung kontinuierlicher Linien tritt nur bei ganz langsamem Drehen der Elektrisiermaschine ein, da die sonst auftretenden heftigen Konvektionsströmungen die entstandenen Linien zerwirbeln und ein lückenhaftes Bild entstehen lassen. Diese Konvektionsströmungen lassen sich durch nichts verhindern, auch nicht durch Einbetten der Elektroden in Glas, Schellack etc., oder durch Ansetzen der Elektroden von außen her an die Schale; es ist also nur möglich dafür Sorge zu tragen, daß diese Strömungen mit möglichst kleiner Geschwindigkeit verlaufen, was durch Benutzung geringer elektrischer Intensitäten auch gut erreichbar ist. — Die Entstehung dieser Konvektionsströmungen ist teils wohl durch direkte Ladung von Flüssigkeitsteilchen bedingt, da Terpentinöl ja kein homogener Körper ist, zum Teil aber auch durch Reibung zwischen Flüssigkeit und Elektroden bez. Gefäßwand. Ein *vollkommenes* Dielektrikum, das frei ist von leitenden Teilchen, müßte auch frei von Konvektionströmungen sein. Ein solches ist aber kaum zu erhalten und wäre für die vorliegenden Versuche auch von keinem weiteren Vorteile, da nach Coehn¹⁾ die in ihm suspendierten Partikelchen sich laden müßten, weil ihre Dielektrizitätskonstante verschieden von derjenigen der dielektrischen Flüssigkeit ist; und damit wäre dann ebenfalls Anlaß zu Strömungen gegeben.

Diese Strömungen werden gegen gering, wenn den Elektroden geringe Elektrizitätsmengen zugeführt werden; es genügt also eine *kleine* Influenzmaschine, z. B. eine zweiplattige *Wimshurst* (Durchmesser der Hartgummiplatten 30 cm); eine solche wurde auch für die hier angegebenen Versuche verwendet.

Statt die Influenzmaschine während des ganzen Versuches in gleichförmiger, langsamer Rotation zu erhalten, was aber doch nie vollkommen, d. h. ohne ruckweise Intensitätsänderungen von statten geht, ist es bei weitem besser die erforderliche Spannung von einer *Leydener Flaschenbatterie* her (die aber in dauernder Verbindung mit der Influenzmaschine bleibt) den Elektroden zuzuführen. Als zweckmäßige Batterie erwies sich, bei Gebrauch dieser Wimshurst, eine solche von ca. 18000 cm²

1) A. Coehn, Wied. Ann. 64. p. 219. 1898.

Innenbelegung. Eine einmalige Ladung auf 10–15000 Volt (entsprechend einem Entladungsfunken von etwa $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{2}$ cm) genügt dann, besonders bei Anwendung von Glycinsuspensionen, zur vollständigen Herstellung eines Linienbildes; nimmt die Spannung durch Leitung etc. zu sehr ab, was aus undeutlicher Linienentwicklung erkennbar ist, so kann sie ohne weiteres durch Ingangsetzen der Maschine, was nun nicht mehr langsam zu geschehen braucht, erhöht werden; dies ist bei Chininsulfatsuspensionen meist nötig.

Hier möge die interessante Feststellung Platz finden, daß Faraday bei dem unter § 1571 ¹⁾ angegebenen Versuche [wo er einen Tropfen Gummiwasser in Terpentinöl elektrisierte und dann beobachtete, daß von dem Tropfen Fäden ausgingen (also „materielle Kraftlinien“), die aber *zerwirbelten*] bei Anwendung *geringerer* Intensitäten sicherlich ein deutliches *Kraftlinienbild* erhalten haben würde.

4. Schalen, Elektroden etc.

Die Höhe der Suspensionen in den Schalen beträgt am besten etwa 1 cm, ist jedoch sehr abhängig von den Dimensionen der Schalen, der Elektrodenabstand und vor allem von der Dielektrizitätskonstante und der Leitfähigkeit des Gefäßbodens, wie ja leicht erklärlich. Bei kleiner Elektrodenabstand (5–7 cm) und gut isolierender Bodensubstanz genügen oft schon Höhen von knapp 0,5 cm. Für Versuche in gut isolierenden Kristallisierschalen (die übrigens sehr selten sind; unter 28, aus verschiedenen Fabriken stammenden Schalen, war nur eine einzige gut brauchbar) von etwa 12 cm Durchmesser sind Höhen von $1\frac{1}{2}$ –2 cm erforderlich; für Hartgummischalen größerer Dimensionen (35:35 cm) etwa ebensolche. Eine genaue Norm läßt sich kaum angeben; die jedesmal beste Höhe läßt sich aber leicht durch ein paar Vorversuche ermitteln. Allgemein gilt nur: je niedriger die Flüssigkeitsschicht und je größer die Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Schalenbodens, um so mehr Kraftlinien werden dann in diesen einbiegen und ihre richtende Kraft nicht auf die suspendierten Teilchen ausüben können.

1) M. Faraday, Experimentaluntersuchungen, deutsch von Kalischer. Berlin 1894.

Also Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante müssen bei der Schalenmasse möglichst gering sein. Dies trifft aber nur selten und zufällig bei den im Handel erhältlichen zu, von denen nur die „Kristallisierschalen“ leidlich brauchbar sind. Schalen aus Zelluloid haben Inhomogenitäten bezüglich der Dielektrizitätskonstante und schließlich sind bei den käuflichen Hartgummischalen meist störende Kittsubstanzen verwandt.

Es ist daher nötig die Schalen selbst herzustellen und zwar am besten aus Hartgummi, das sich ja auch bei nur geringer Übung außerordentlich leicht bearbeiten läßt. Aus Hartgummi hat mindestens der Gefäßboden zu bestehen; so erhält man z. B. sehr brauchbare Schalen durch Aufkitten eines Glasringes von etwa 3 cm Höhe und ca. 13 cm Durchmesser (Kristallisierschale mit abgesprengtem Boden) auf eine Hartgummiplatte von 2–3 mm Dicke, wobei als Kittsubstanz (wie auch in den übrigen Fällen) eine möglichst dickflüssige alkoholische Schellacklösung zu benutzen ist, da Schellack, im Gegensatz zu Siegellack etc., von Terpentinöl nicht angegriffen wird. Erst nach gründlichem Trocknen (während mindestens 1 Woche) kann die Schale in Gebrauch genommen werden, da sonst der darin enthaltene Alkohol vermöge seiner Leitfähigkeit und hohen Dielektrizitätskonstante störende Ablenkungen der Linien hervorbringen würde.

Auch einfach durch Falzen aus ganz dünnem Hartgummi (0,7–1 mm dick) lassen sich vorzügliche Schalen (bis 20 : 20 cm) bequem herstellen; denn solch dünner Hartgummi kann mit einer gewöhnlichen, aber heißgemachten Schere leicht in die erforderliche Größe geschnitten werden, und zum Aufbiegen der Ränder ist es nur nötig, die Falzstelle mittels der „Schneide“ eines heißgemachten Metallstreifens (Metalllineal) zu erwärmen, wonach das Biegen ohne weiteres möglich ist; nach dem Erkalten der Falzstelle bleibt das Hartgummi in der gegebenen Stellung. — Soviel an dieser Stelle über die Selbstherstellung der Schalen; einige speziellere Angaben folgen später bei der Beschreibung der betreffenden Liniendarstellungen.¹⁾

1) Schalen, Elektroden, Elektrodenhalter etc., wie sie zu den in dieser Arbeit beschriebenen Versuchen gebraucht werden, fertigt der Mechaniker am hiesigen Physikalischen Institut, F. Böhrer, an.

Die *Aufstellung der Schalen* hat möglichst isoliert zu geschehen, z. B. auf einem Paraffinblock oder am besten auf isolierenden Klötzchen, die an den Schalenecken untergesetzt werden, da dann nur die Luft mit ihrer Dielektrizitätskonstante (nahe gleich 1) an den Schalenboden angrenzt.

Die *Elektroden* können für die einfachsten Fälle, wo es sich z. B. nur um die Demonstration des Linienverlaufes zwischen zwei elektrisch geladenen *Punkten* handelt, aus 2—3 mm dicken Drähten bestehen; dünnere Drähte sind zu vermeiden wegen der dabei unnütz starken Anstrahlungen und bei Chininsulfat wegen des leichten Abfallens der Ansammlungen, die sich regelmäßig am + Pole bilden; zweckmäßig jedoch ist es noch kleine Messingkugeln (von etwa 1 cm Durchmesser) an die Drahtenden anzulöten.

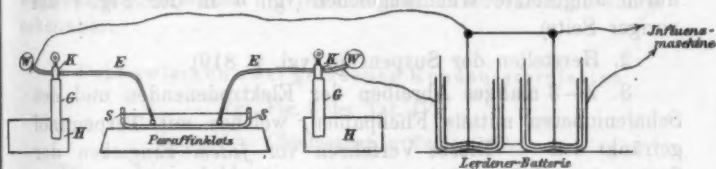


Fig. 1.

Für Darstellungen des Linienverlaufes zwischen *Kondensatorplatten* lassen sich Elektroden benutzen, die aus Metallstreifen von 5—10 cm Länge und 3 cm Breite bestehen und bei denen auf die Mitte einer Längsseite der Zuführungsdraht gelötet ist; diese Elektroden werden mit der „Schneide“ in die Suspension hineingestellt.

Als Material für die Elektroden bewährte sich Messing; Kupfer wird verhältnismäßig leicht angegriffen und verdirbt dann oft die Suspensionen.

Zum Festhalten der Elektroden in jeder beliebigen Lage diene bequem der in nachstehender Fig. 1 abgebildete Elektrodenhalter; er besteht aus einem Klotz (H) von schwerem Holze, in welchen, nahe dem Ende, ein außen und innen mit Schellack überzogenes Glasrohr (G) vertikal eingesetzt ist; eine in das obere Rohrende mit Siegelack eingekittete Polklemme (K) dient zum Festhalten des zur Elektrode gehören-

den Zuführungsdrahtes (*E*). Statt des Glasrohres (*G*) kann jedoch zweckmäßig auch eine Hartgummisäule eingesetzt werden, die von oben her auf etwa 2–3 cm geschlitzt ist und in die dann der Elektrodendraht eingeklemmt wird.

Die Technik der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes ergibt sich am einfachsten aus folgendem Schema.

5. Schema der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes.

1. Erschütterungsfreies und isoliertes Aufstellen der betreffenden Schale; Einstellen der Elektroden. Herstellung der Verbindungen zwischen Influenzmaschine, Kapazität und Elektroden (vgl. obige Fig. 1). Zuführungsdrähte möglichst kurz und *ohne* Knicke; Schutz der Drahtenden gegen Ausstrahlungen durch aufgesetzte Wackskügelchen (vgl. *W* in der Fig. 1 auf voriger Seite).

2. Herstellen der Suspension (vgl. p. 819).

3. 2–3 maliges Abreiben der Elektrodenenden und des Schaleninneren mittels Fließpapier, welches mit Terpentinöl getränkt ist. — Dieses Verfahren vor *jedem* Eingießen der Suspension wiederholen! —

4. Laden der Batterie (eher etwas zu schwach als zu stark).

5. Nochmaliges kräftiges Aufrühren der Suspension und rasches Eingießen in der geeigneten Menge; entstandene Schaumblasen durch ein kurzes Blasen über die Oberfläche entfernen.

6. Falls das Richten der Partikelchen, die „Linienbildung“ nicht deutlich genug einsetzt, die Batterie *stärker* laden.

Das Entstehen von *Lücken* im Linienbilde wird meist durch zu hohe Spannungen verursacht, seltener durch Unsauberkeit des Schalenbodens (in diesem Falle wiederholtes, gründliches Abreiben mit Terpentin und Filtrierpapier).

7. Nach dem völligen Ausbilden der Linien und nachdem das überstehende Terpentin sich geklärt hat, eventuelles, aber sehr vorsichtiges Herausheben der Elektroden. Die Batterie *nicht* entladen, *solange noch Verbindung* zwischen ihr und den in die Flüssigkeit eintauchenden Elektroden (solche Entladung würde das Linienbild teilweise zerstören).

6. Darstellungen spezieller elektrostatischer Felder.

[Die beigegebenen photographischen Abbildungen der hergestellten Linienbilder wurden durch Aufnahmen vertikal abwärts, zum Teil aber auch mittels horizontaler Kamera und Spiegel erhalten.]

a) Feld zwischen zwei geladenen Kugeln.

Vgl. Fig. 1 der Taf. IV.

Suspension: Glycin in Terpentinöl.

Anordnung wie durch Fig. 1, vgl. p. 823, angedeutet; benutzte Schale: Glasring mit aufgekittetem Hartgummiboden.

Bei guten Darstellungen mit Glycinsuspensionen ist der wechselnde Querschnitt der Kraftströme außerordentlich schön erkennbar.

b) Feld zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten.

Vgl. Fig. 2 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Dieses Linienbild, das an der einen Elektrode ein wenig „Lücken“ zeigt, war etwas zu hohen Spannungen ausgesetzt, die aber durch „Rückwärtsdrehen“ der Influenzmaschine noch genügend erniedrigt werden konnten, sodaß sich schließlich dieses für ein „homogenes Feld“ und zur Veranschaulichung der „störenden“ Randwirkungen instruktive Bild ergab; die Linien waren bei dieser Darstellung sehr deutlich, sogar von Plattenrückseite zu Rückseite verfolgbar.

c) Feld zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; einseitig „gestört“ durch genäherten Leiter (Metallklotz).

Vgl. Fig. 3 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Benutzte Schale: Glasring mit aufgekittetem Hartgummiboden. — Deutliches Hinbiegen der elektrischen Kraftlinien zu dem die Schale von außen berührenden Metallklotz *M*. Die Linien sind auf dieser „besser influenzierbaren“ Seite deutlicher ausgebildet als auf der anderen, ungestörten Seite.

d) Feld zwischen zwei Kondensatorplatten mit dazwischen gebrachtem Metallring; Richtungsänderung des elektrischen Kraftlinienverlaufes und Schirmwirkung durch den Metallring. — Fehlende Schirmwirkung (vollständige) bei eingesetztem Hartgummiring.

Vgl. Fig. 4 u. 5 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

In die Schale und besonders in den Raum zwischen den Elektroden eingebrachte Metalle (oder andere influenzierbare Leiter) sammeln, „konzentrieren“ die elektrischen Kraftlinien ähnlich wie Eisenmassen die Linien des magnetischen Feldes sammeln. Für einen besonderen Fall, unter gleichzeitiger Demonstration der elektrischen *Schirmwirkung von Metallen* zeigt dies Fig. 4 der Taf. IV, wo in den Raum innerhalb zweier Plattenelektroden (deren eine mit photographiert ist) ein Messingring von 2 cm Höhe eingesetzt ist. Das Bild zeigt deutlich, daß im *Innern* des Ringes keinerlei elektrische Spannung bestand, da das Chininsulfat dort vollkommen regellos sedimentierte, und wie der Ring die Linien „nach sich hin zieht“ — oder, wie er durch Influenz scheinbar *eigene Pole* erhalten hat, von denen aus Kraftlinien zu den gegenüberliegenden Elektroden hingehen.¹⁾ Die Polarität des Chininsulfats ist in diesem Falle ein entschiedener Vorteil, da auf diese Weise direkt erkennbar ist, daß der influenzierte — Pol, an dem stets die *dichtere* Chininsulfatabscheidung stattfindet, sich der positiven Elektrode gegenüber befindet.

Zur Bestätigung, daß nur ein *Leiter* eine Schirmwirkung (eine vollständige) ausübt, wurde dieser Versuch in gleicher Weise wiederholt, nur daß an Stelle des Metallringes ein entsprechender aus Hartgummi trat; die Kraftlinien verlaufen dann (auch im Innern des Ringes) fast ebenso, wie diejenigen in einem homogenen Medium; die Abweichungen ergeben sich aus der nur angenäherten Übereinstimmung der Dielektrizitätskonstanten von Hartgummi und Suspension, vgl. hierzu Fig. 5 der Taf. IV. Auch hier sind an der Grenzfläche der beiden Medien, Hartgummi und Terpentinöl, die influenzierten Pole

1) Vgl. die analoge *magnetische* Figur bei W. Leick, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 2. Taf. XVI, Fig. 9. 1899.

an der Verschiedenheit der Chininsulfatanhäufungen gut erkennbar. —

Bei Benutzung von Ringen aus Glas von beträchtlich höherer Dielektrizitätskonstante, als jener der Suspension, läßt sich die zunehmende Schirmwirkung und die stärkere Ausbildung der „influenzierten Pole“ auf der Grenzschicht beider Dielektrika bequem demonstrieren; eventuell sogar gleichzeitig durch konzentrisches Einsetzen von Ringen verschiedenen Durchmessers und verschiedener Dielektrizitätskonstante.

- e) Richtungsänderungen, hervorgebracht durch Dielektrika von anderer Konstante.

Vgl. Fig. 6 u. 7 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Die Demonstration der Richtungsänderungen, die hervor gebracht werden durch Dielektrika von anderer Konstante, als diejenige des übrigen Feldes ist, bereitete ganz außerordentliche Schwierigkeiten; vor allem weil Dielektrika mit genügend hoher Konstante gegenüber derjenigen der Suspension unter den festen Körpern kaum, wenigstens nicht einwandfrei¹⁾, zu haben und unter den Flüssigkeiten nur mit vieler Mühe brauchbar zu erhalten sind wegen ihrer oft recht beträchtlichen Leitfähigkeiten.

Nach vielen vergeblichen Versuchen mit Glasklötzen von verhältnismäßig hoher Dielektrizitätskonstante und mit Prismen aus schwerem Glase wurden zunächst Dielektrika von künstlich hoher Dielektrizitätskonstante²⁾ hergestellt durch reichliches

1) Nach W. Schmidt (Ann. d. Phys. 5. p. 932. 1902) hat *Rutil*, neben verschwindender Leitfähigkeit, eine Dielektrizitätskonstante von über ca. 170, also eine noch bedeutend höhere als diejenige für Wasser ist. Aber diese hohe Dielektrizitätskonstante ist vielleicht nur vorgetäuscht, d. h. die Wirkung kleiner, im Kristall vorhandener und mit leitender Flüssigkeit erfüllter länglicher Höhlungen. — Die beim *Rutil* hervorragend beobachtete faserige Struktur (*Sagenit*) läßt solche Erklärung plausibel erscheinen.

2) Diese Dielektrika mit künstlich hoher Konstante wurden bereits im Winter 1900/1901 in Greifswald vom Verfasser dieser Arbeit hergestellt und zu obigen Versuchen verwandt. — Gleiche Dielektrika hat auch K. Kießling angewandt: Dissert. Greifswald 1902.

Suspendieren von allerfeinstem („pyrophorem“) Eisenpulver¹⁾ in geschmolzenem Paraffin, worin dann nach dem Erstarren die Partikelchen gleichmäßig verteilt und voneinander isoliert waren. Die Herstellung eines genügend *gleichmäßigen* Stückes von auch nur etwa 50 cm³ Inhalt bereitet bedeutende Schwierigkeiten, da die unteren Schichten infolge des Sedimentierens der Eisenteilchen sich immer anzureichern streben; durch geschicktes Umrühren und durch rasches Abkühlen des nur eben bis zum Schmelzen erhitzten Paraffins gelingt es schließlich doch brauchbare Stücke zu erhalten, die sich dann mit dem Messer oder auf der Drehbank bequem bearbeiten lassen.

Beim Einsetzen eines solchen Dielektrikums (das durch einen Schellacküberzug gegen die Auflösung im Terpentinöl geschützt war) in ein elektrostatisches Feld gelang es nun auch endlich die Richtungsänderung zu demonstrieren.

Es war aber wünschenswert, nicht nur ein künstliches, sondern auch ein natürliches Dielektrikum zu verwenden.

Aus diesem Grunde kamen daher als richtungsändernde Dielektrika nur flüssige in Betracht, und unter diesen auch nur solche, bei denen die Leitfähigkeit sich, innerhalb gewisser Grenzen natürlich, beliebig ändern läßt; am ehesten jene, deren ursprünglich große Leitfähigkeit sich auf gleiche Weise verringern läßt, wie es Hertz beim Benzin beobachtete²⁾ und wie es ähnlich von A. Kleiner³⁾ an Paraffin konstatiert ist. Hertz konnte nämlich durch wiederholtes Laden und Entladen eines „Kondensators“, der aus Zinkplatten bestand und Benzin als Dielektrikum enthielt, die anfänglich außerordentlich hohe Leitfähigkeit auf einen verschwindend kleinen Betrag herunterbringen, sodaß „dieses elektrisch gereinigte Benzin in seinem Verhalten dem eines idealen flüssigen Isolators ganz außerordentlich nahe“ kam. (Ein ähnliches Verfahren wird auch in der Kabelindustrie zur Isolationsverbesserung benutzt.)

Diese Methode ließ sich, wie sich herausstellte, auch beim *Methylalkohol*, der wegen seiner beträchtlichen Dielektrizitätskonstante (= 32,6) gewählt war, anwenden; ausgegangen

1) Zu beziehen von Dr. Paul Lohmann in Hameln a. d. Weser.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 20. p. 279—284. 1888.

3) A. Kleiner, Arch. sc. phys. (3) 32. p. 282—284. 1894.

wurde von als absolut rein bezogenem und möglichst wasserfrei gemachtem Methylalkohol. (Eine analoge „elektrische Reinigung“ geht offenbar auch in der *Terpentin-Chininsulfat-suspension* vor sich, da diese Suspension gewöhnlich erst nach drei- bis viermaligem Gebrauche vorzügliche Resultate gibt.)

Da es für *einwandfreie* Einbiegungsversuche nun darauf ankommt, daß die Leitfähigkeiten der Suspension und des eingesetzten Dielektrikums¹⁾ einander möglich nahe gleich sind, wurde zunächst diejenige der Suspension bestimmt (unter Benutzung eines Siemens-Universalinstrumentes mittels Brückenschaltung mit Zweigleitungen²⁾ und darauf jene des Methylalkohols so lange erniedrigt (durch die „elektrische Reinigung“), bis seine Leitfähigkeit *eben niedriger* wurde als jene der Suspension. Erst nach mehrmaligem, gründlichen Ausspülen mittels solchen gereinigten Methylalkohols wurde die Glaskugel, deren Verwendung gleich besprochen werden soll, mit dem Methylalkohol, der bezüglich seiner Leitfähigkeit nunmehr gleichwertig der Suspension war, gefüllt und fest verschlossen.

Aus zahlreichen Vorversuchen (meist mit dem Dielektrikum von künstlich hoher Konstante ausgeführt) hatte sich ergeben, daß, um einigermaßen gute Wirkungen zu erhalten, einfaches Hineinstellen eines mit dem betreffenden Dielektrikum gefüllten Becherglases nicht genügt, weil der Boden des Glasgefäßes sich gerade in Höhe der meisten der in der Suspension verlaufenden Kraftlinien befindet und die Dielektrizitätskonstante des Glases sehr nahe gleich derjenigen der Suspension ist. Aufkitten eines Glasringes auf den Gefäßboden ist unstatthaft, da Schellack, der sonst hierbei verwendet wurde, vom Methylalkohol angegriffen wird, und andere, dauerhafte Kittsubstanzen wegen zu hoher Leitfähigkeit nicht anwendbar sind. Etwas besser ist es schon, wenn der Schalenboden rings um dem Glase erhöht wird, etwa durch Einlegen einer den Schalenboden ausfüllenden Hartgummiplatte, die in der Mitte eine zum genauen Einsetzen des Becherglases passende Öffnung hat. — Recht gut bewährt hat sich dagegen folgende Schalenkonstruktion: in eine etwa 1 cm starke Hartgummiplatte

1) Theoretisch am besten wäre für dieses absolute Nichtleitfähigkeit.

2) F. Kohlrausch, Lehrbuch p. 400.

von der Größe 22:30 cm ist eine kreisrunde Öffnung gedreht, in die eine Glaskugel von 8 cm Durchmesser (wie sie bei der Dumasschen Dampfdichtebestimmung gebraucht wird) mit ihrer Äquatorialzone genau hineinpaßt und mittels Schellack (vgl. p. 822) eingekittet ist; die Schalenränder werden durch Hartgummistreifen von 3 mm Stärke und $2\frac{1}{2}$ cm Höhe gebildet, die in Nuten eingesetzt und gekittet sind, welche nahe den Rändern der Bodenplatte $\frac{1}{2}$ cm tief eingefräst waren. — Die Hauptsache ist bei dieser Konstruktion, daß der Methylalkohol in der ganzen Dicke der Suspensionsschicht vorhanden ist. Nur nützlich und die Beweiskraft des Versuches vermehrend können die oberhalb und unterhalb des Niveaus der Suspensionsschicht befindlichen Methylalkoholschichten wirken, welche die Kraftlinien aus der Luft in sich hineinziehen, und dadurch auch ein stärkeres Einbiegen im Niveau der Suspension bewirken. Jedoch ist diese Wirkung der über und unter die Suspension reichenden Teile des eingesetzten Dielektrikums nur sehr gering; denn selbst bei Versuchen, bei denen sich Dielektrika von künstlich hoher Konstante (vgl. p. 827 u. 828) nur direkt über und unter der Suspension befanden, war keine merkliche Richtungsänderung zu konstatieren. —

Bei einer auf diese Weise konstruierten Schale läßt sich der Methylalkohol hermetisch abschließen und bleibt daher auch für weitere Versuche brauchbar.

Als Elektroden dienten wiederum ziemlich ausgedehnte Platten, da die Abweichung der Kraftlinien von dem geradlinigen Verlaufe bei ihnen am leichtesten konstatierbar ist.

Fig. 6 der Taf. IV zeigt das *Einbiegen* der elektrischen Kraftlinien bei mit Methylalkohol gefüllter Kugel.¹⁾

Fig. 7 der Taf. IV zeigt das *Ausbiegen* bei einem Dielektrikum niederer Konstante als diejenige der Suspension: die Kugel ist leer, nur mit Luft, von der Konstante = 1, erfüllt.

Diese Figur dient aber gleichzeitig als Kontrollobjekt dafür, daß das Einbiegen nicht etwa durch Leitfähigkeit des Glases (der Kugel) oder der Kittsubstanz hervorgebracht wurde.

1) Vgl. die analoge Figur in W. Leick, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 2. Taf. XV, Fig. 8. Reproduziert in: F. Richarz, Neuere Fortschritte, 2. Aufl. p. 92. Fig. 66. B. G. Teubner, Leipzig.

Außerdem wurde durch Wiederholung der Bestimmung des Verhältnisses der Leitfähigkeiten von Methylalkohol und Suspension *nach* Herstellung des Linienbildes die definitive Kontrolle erreicht dafür, daß das Einbiegen wirklich nur durch die Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten veranlaßt wurde. Die Prüfung der Leitfähigkeit geschah wiederum nach der auf p. 829, Anm. 2 angegebenen Methode, und zwar mit dem Resultate, daß die Leitfähigkeit der Suspension sich auch *nach* einem Versuche als größer erwies, als jene des Methylalkohols; durch die „elektrische Reinigung“ war zwar die Leitfähigkeit der Suspension eine etwas niedrigere geworden, *gleichzeitig* aber auch diejenige des in der Glaskugel befindlichen Methylalkohols, sodaß das Verhältnis bestehen blieb.

f) Brechung elektrischer Kraftlinien.

Um *Brechung* elektrischer Kraftlinien handelte es sich natürlich auch schon in den eben beschriebenen Versuchen über „Richtungsänderungen durch in das Feld eingebrachte Dielektrika“; nur wurde dort der Linienverlauf im „anderen“ Dielektrikum nicht objektiv, nicht materiell dargestellt. — Eine solche materielle Darstellung der Brechung ist nun nach einer Reihe verschiedener Methoden und mit Erfolg versucht worden; diese Versuche sind jedoch noch nicht abgeschlossen.

7. Projektion elektrischer Kraftlinienfelder.

Alle diese bisher beschriebenen Kraftlinienbilder, hergestellt durch die *Methode der Suspensionen in Terpentinöl*, lassen sich aber auch außerordentlich gut durch *Projektion* einem großen Auditorium gleichzeitig sichtbar machen und zwar am leichtesten durch Projektion im durchfallenden Lichte, da bei den hierbei zu verwendenden verhältnismäßig kleinen Dimensionen der Schalen diese aus Glas bestehen können.

Die Einrichtung ist kurz folgende (vgl. nachstehende Fig. 2). Das von einer Bogenlampe kommende, parallel gemachte Licht trifft auf einen unter 45° geneigten Spiegel *S* und wird von dort auf die vertikal über ihm befindliche, horizontale Kondensatorlinse *L* (Durchmesser 15 cm) geworfen, die

das Lichtbündel vereinigt durch das Projektionsobjektiv O gehen läßt. Spiegel s wirft dann das Licht in horizontaler Richtung auf den Schirm. — Direkt über L befindet sich eine quadratische Hartgummiplatte (30 cm Seitenlänge, 1 cm Dicke), mit einer kreisrunden Öffnung D (13 cm Durchmesser) in der Mitte. Nahe den 4 Ecken der Hartgummiplatte sind 4 Hartgummiskrüben (in der Fig. nur H_1 und H_2 gezeichnet) eingeschraubt, die am oberen Ende zum Einklemmen der Elektrodendrähte geschlitzt sind und als Elektrodenhalter dienen. Über die Öffnung D kommt dann die Schale, in der das betreffende Linienbild erzeugt werden soll, zu stehen.

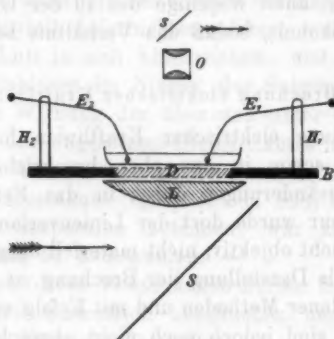


Fig. 2.

Als Schalen können zur Not große Uhrgläser dienen. Kristallisierschalen sind wegen Schlieren und sonstiger Ungleichförmigkeiten des Bodens meist nicht verwendbar. Am besten jedoch bedient man sich parallelepipedischer Glaströge, zusammengesetzt aus planen Glasplatten und gekittet mit Schellacklösung (Dimensionen zweckmäßig Boden 13:18 cm, Randhöhe 2 cm). Für Versuche über Aus- bez. Einbiegen bei eingesetztem Dielektrikum von anderer Dielektrizitätskonstante sind Schalen zu verwenden, in deren Boden eine ca. 3 cm große Öffnung gebohrt und in die eine Glaskugel von entsprechendem Durchmesser gekittet ist.¹⁾

1) Vgl. die Anmerkung auf p. 822.

B. Methode: Suspension in geschmolzenem Paraffin.

1. Prinzip und Anwendbarkeit dieser Methode.

Im folgenden soll jetzt eine zweite Methode der Darstellung elektrischer Kraftlinien beschrieben werden, deren Prinzip folgendes ist:

In *geschmolzenem Paraffin*, in welchem feines Holzkohlenpulver suspendiert ist, wird das betreffende elektrostatische Feld erregt (zwischen ebensolchen Elektroden wie bei den zuvor beschriebenen Suspensionen in Terpentinöl), wobei die Holzkohleteilchen als Leiter sich influenzelektrisch laden, in „Kraftlinien“ anordnen und sedimentieren, welche Lage sie dann auch beim Erkalten des Paraffins beibehalten und auf diese Weise in der *erstarrten* Masse ein *fixiertes Kraftlinienbild* geben.¹⁾

Neben diesem Vorteile des „Sichselbstfixierens“ der Kraftlinienbilder hat diese Methode noch den weiteren der äußerst leichten und schnellen Herstellbarkeit. — Nachteil dagegen ist die weniger vielseitige Verwendbarkeit gegenüber der zuvor beschriebenen; so läßt sich z. B. mit dieser Methode *nicht* demonstrieren:

1. Das *Einbiegen* in ein Dielektrikum von höherer Konstante (wohl aber das Einbiegen in einen Leiter oder das Ausbiegen bei zwischenliegendem Dielektrikum von niedriger Konstante als diejenige der Suspension ist).

2. Die Brechung der Kraftlinien.

In Rücksicht aber auf ihre bequeme Verwendbarkeit und auf den Umstand, daß bei der zuvor beschriebenen Suspensionsmethode (Terpentinöl: Chininsulfat) das Einbiegen in ein Dielektrikum *einwandfrei* nur auf recht komplizierte Weise (wegen der Leitfähigkeiten) demonstrierbar ist, dürfte dieser Methode doch wohl einige Bedeutung zukommen.

2. Versuchsanordnung. Herstellung der Suspension. Schalen, Elektroden etc.

Da es sich im Prinzip auch wieder um eine Suspensionsmethode handelt, behält das auf p. 820 ff. über Influenzmaschine,

1) Alle anderen untersuchten Pulver gaben keine brauchbaren Resultate.

angehängte Kapazität, Elektroden, Aufstellung und Schaltung Ausgeführte auch hier seine Gültigkeit; nur bei den elektrischen Spannungen wäre zu bemerken, daß sie wegen der leichten Influenzierbarkeit der Teilchen bedeutend niedriger sein können; auf gute Isolation der Zuleitungen und möglichst geringe Strahlungsverluste ist aber ebenso Rücksicht zu nehmen, ob schon solche Fehler sich wegen der äußerst kurzen Herstellungszeit nicht so störend bemerkbar machen, wie bei der zuvor beschriebenen Methode.

Die *Suspension*, die man zweckmäßig gleich in größerer Menge ($\frac{1}{2}$ Liter und mehr) vorrätig herstellt, wird in folgender Weise erhalten: Feinstes Holzkohlenpulver (erhältlich in den Apotheken) wird, um gleichmäßige Korngröße zu erhalten, durch Musselin gebeutelt und in geschmolzenem Paraffin (am besten in einem metallenen und emaillierten Gefäße) durch gründliches Umrühren mit einem Glasstabe gleichmäßig verteilt; erforderlich sind auf 100 cm³ Paraffin nur etwa 0,5—0,75 g; die Mengenverhältnisse lassen sich aber auch hier leicht empirisch finden durch Aufgießen kleiner Mengen, weniger Tropfen der betreffenden Suspension auf eine horizontale Glasplatte: Beim Erstarren darf das Paraffin dann nur eben ganz *schwach grau* erscheinen; durch entsprechende Änderung der Mengenverhältnisse und Wiederholung dieser Probe ist eine passende Suspension leicht zu erhalten.

Als *Schalen* genügen, wegen der aus dem Kohlepulverzusatz resultierenden hohen Dielektrizitätskonstante der Suspension, solche aus Glas; am besten dienen Kristallisierschalen, da sich diese verhältnismäßig leicht ohne zu zerspringen über einer Flamme vorwärmen lassen, was zur Verhütung nachherigen „Rissigwerdens“ der Schicht erforderlich ist. (Dieses Verderben der Schicht läßt sich mit Sicherheit vermeiden durch Bestreichen der Oberfläche mit Terpentinöl, wodurch die Masse pastös wird.)

Am besten aber bilden sich diese Linien auf einer mittels Libelle gut horizontal gestellten und an den Ecken auf isolierenden Unterlagen ruhenden Glasplatte (von etwa 20:20 cm Größe). — Ein seitliches Abfließen der Suspension ließ sich dabei in folgender Weise verhindern: Der mittlere Teil der Glasplatte wurde in der Größe einer Kreisfläche von ca. 13 cm

Durchmesser vorsichtig auf 70—80° erwärmt; die dann auf die Mitte der horizontal gestellten Platte aufgegossene geringe und nicht zu hoch erhitzte Suspensionsmenge floß rasch längs der vorgewärmten Fläche bis zu den kälteren Teilen der Platte, wo sie fast momentan erstarrte, oder wenigstens außerordentlich zähflüssig wurde und auf diese Weise einen Rand bildete, der die Suspension am Abfließen hinderte. Wie genau diese Abgrenzung erfolgte, zeigt Fig. 8 der Taf. IV (darstellend den elektrischen Kreislinienverlauf zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten). — Dieses Vorwärmen geschah bequem in folgender Weise: Auf einen Metalldreifuß, wie er beim Kochen über Bunsenbrennern benutzt wird, war ein Stück Asbestpappe (Größe ca. 25:25 cm), das in der Mitte eine kreisrunde Öffnung von 12 cm hatte, gelegt und über diese Öffnung ein kleiner Papptubus von 13 cm Durchmesser und 15 cm Höhe gestellt. Wurde nun auf den oberen Rand des Tubus die betreffende Glasplatte gelegt und unter den Dreifuß eine möglichst klein brennende Flamme (Kerze) gebracht, so erwärmten die im Tubus aufsteigenden heißen Luftmassen und die Strahlung den mittleren Teil der Glasplatte entsprechend dem Lumen des Papptubus, während die übrigen Teile der Platte, geschützt durch den Asbestschirm, kalt blieben. — Die auf so erwärmten Platten hergestellten Linienbilder sind außerordentlich haltbar; „Risse“ treten selten und nur am äußersten Rande und in unschädlicher Weise auf.

Das in solcher Weise hergestellte Linienbild ist wegen seiner bedeutenden Lichtdurchlässigkeit (die Schichtdicke beträgt nur 3—4 mm) zur Projektion ganz ebenso verwendbar wie ein gewöhnliches photographisches Diapositiv. Auch läßt es sich direkt photographisch vervielfältigen; es ist dazu nur nötig die betreffende Linienplatte mit ihrer Glasseite auf ein Blatt lichtempfindlichen Bromsilberpapiere zu legen (in der Dunkelkammer natürlich), über der Platte, in $1\frac{1}{2}$ —2 m Abstand, ein Streichholz abzubrennen und danach das Bromsilberpapier in der gewöhnlichen Weise zu entwickeln und fixieren.

3. Schema der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes nach der Methode: Suspension in geschmolzenem Paraffin.

1. Herstellung der Verbindungen etc. entsprechend Fig. 1 auf p. 823.

2. Genaues Horizontalstellen (mittels Libelle) der mit den Ecken auf isolierenden Unterlagen (Glasklötzen) ruhenden Glasplatte.

3. Vorwärmen der Plattenmitte (vorsichtig, während 10 bis 15 Minuten und auf ca. 80°) vgl. vor. S. Erwärmen der vorrätigen Suspension bis zum eben eintretenden Schmelzen (also unnötige Erhitzung vermeiden!).

4. Auflegen der erwärmten Platte auf die (bei 2.) justierten Unterlagen; Aufsetzen der mittels Bunsenflamme etwas vorgewärmten Elektroden, Laden der Batterie auf *mäßige* Spannung und Aufgießen der nochmals gut aufgeführten Suspension auf die Plattenmitte (nur so viel aufgießen, als zum Bedecken der erwärmten Fläche nötig!).

5. Falls deutliche Linienbildung ausbleibt, die Batterie stärker laden, aber vorsichtig, da bei zu hohen Spannungen sich lebhafte Konvektionsströmungen ausbilden, die dann die Linien teilweise wieder vernichten.

6. Nach dem *vollkommenen* Erstarren der aufgeggossenen Suspension die Batterie entladen und die Elektroden entfernen; letzteres am besten folgendermaßen auszuführen: während eine Hand an der Elektrode leicht zieht, wird deren unteres Ende, nahe der Schicht, durch vorsichtiges Berühren mit einem erhitzten Lötkolben erwärmt, wodurch die an der Elektrode haftenden Schichten schmelzen, sodaß plötzlich die Elektrode herausschnellt.

4. Darstellung spezieller elektrostatischer Felder mittels dieser Methode.

Mit den auf p. 838 gegebenen Einschränkungen sind alle zuvor, auf p. 825 bis 830, beschriebenen Kraftlinienfelder auch mittels dieser Methode bequem nachbildbar; auf beigegegebener Tafel ist nur die Darstellung eines Feldes zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten reproduziert (Fig. 8). — Die Ausführung, die Wahl der Elektroden etc. ergibt sich nach dem

bei der Methode: Suspension in Terpentinöl, Gesagten wohl von selbst; daher nur für folgenden Versuch eine kleine technische Mitteilung.

Ausbiegen der elektrischen Kraftlinien bei eingesetztem Dielektrikum von niedrigerer Konstante als derjenigen der Paraffin-Kohle-Suspension.

Die Mitte der Glasplatte enthält eine Durchbohrung von 3 cm, in die ein aus Hartgummi gedrehtes zylindrisches Gefäß von 3 cm Durchmesser, 4 cm Höhe und 2 mm Wandstärke dicht und bis zur halben Höhe eingesetzt (eingeklemmt) ist.

Bei Füllung dieses Gefäßes mit einer Substanz von niedriger Dielektrizitätskonstante als diejenige der Suspension, oder auch wenn es leer bleibt, tritt „Ausbiegen“ der Kraftlinien ein.

Bei Füllung dieses Gefäßes mit einer Substanz, die metallisch oder elektrolytisch leitet, tritt dagegen Einbiegen auf.

C. Darstellung elektrischer Kraftlinien mittels Lichtenbergscher Figuren.

Lichtenbergsche Figuren werden für gewöhnlich nur einpolig dargestellt, trotzdem leicht zu vermuten ist, daß bei gleichzeitiger Erzeugung beider Figuren (\pm) auf ein und derselben Platte und nahe beieinander ein den elektrischen Kraftlinienverlauf andeutendes Bild zu erhalten sein müsse.

Versuche in folgender Anordnung bestätigten diese Voraussetzung: auf einer gut isolierenden, trocken geriebenen und über einer Flamme entladenen Hartgummiplatte wird am besten zuerst das Pulvergemisch [Schwefel-Mennige oder besser jenes nach dem Bürkerschen Rezept¹⁾] aufgestreut und dann schnell die beiden Metallzylinderchen in einem gegenseitigen Abstände von etwa 5 cm aufgestellt und durch gleichzeitiges Berühren mit zwei \pm geladenen Leydener Flaschen entsprechende Ladungen erteilt; die typischen \pm Figuren erscheinen dann sofort rings um beiden Polen, während zwischen ihnen sich eine große Zahl Kraftlinien ausbildet. Am sichersten entstehen diese Linien, wenn die negative Ladung früher als die positive dem betreffenden Zylinderchen zugeführt wird.

1) K. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474—482, 1900; Rezept: 1 Teil Karmin, 8 Teile Lykopodium, 5 Teile Schwefelblumen.

D. Darstellung „elektrischer Niveaulinien“.

Hierzu Fig. 9 der Taf. IV.

Bei den Versuchen elektrische Kraftlinien auch in Luft mittels Pulver, die auf isolierender Unterlage aufgestreut sind, herzustellen, wurde die in Fig. 9 der Taf. IV wiedergegebene Figur erhalten, die, wenn auch nur in groben Zügen, immerhin ein ganz gutes Bild des Niveaulinienverlaufes zwischen zwei geladenen Kugeln gibt. (Die Aufsetzstellen der Elektroden sind in der Photographie durch eingeritzte \times Marken gekennzeichnet). Die Versuchsanordnung war dabei folgende: auf eine gut isolierende, polierte Hartgummiplatte, auf der zwei mit einer 20-plattigen Töplerschen Influenzmaschine in Verbindung stehende Elektroden (gegenseitiger Abstand 10—13 cm) aufsaßen, wurde feinkörniger Sand aufgestreut, der sich dann, nach kurzer Tätigkeit der Influenzmaschine, in breiten Linien senkrecht zu den Kraftlinien, in „Niveaulinien“ anordnete.

Die Entstehung dieser „elektrischen Niveaulinien“ aus der Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten der Unterlage, der Luft und der Sandkörner zu erklären, erscheint kaum möglich; vielmehr sind diese Linienanordnungen wohl nur das Resultat Bjerknesscher *hydrodynamischer Kräfte*. — Der elektrische Wind, der bei Benutzung solch starker Elektrizitätsquellen von außerordentlicher Lebhaftigkeit ist und der zuerst analog der W. Königschen Theorie der Entstehung der Kundtschen Staubfiguren¹⁾ eine diesen Figuren ähnliche Entstehungsweise vermuten ließ, ist jedoch nicht die Ursache dieser Erscheinung; denn erstens gelang es in keiner Weise, diese „Niveaulinien“ durch künstliche Luftströme (bei einem Aus- und einem Einstromungspunkte) nachzubilden, und zweitens durfte, wenn der elektrische Wind das Entscheidende für die Entstehung war, die gute Isolationsfähigkeit der Unterlage nicht von so ausschlaggebender Bedeutung sein, wie dies Versuche bewiesen; denn auf weniger gut isolierenden Platten, wie z. B. solchen von Glas, oder von oberflächlich nicht ganz trockenem Hartgummi zeigten sich nie „Niveaulinien“, sondern immer nur

1) W. König, Wied. Ann. 42. p. 353—370 u. p. 549—563. 1891; 43. p. 43—60. 1891; 50. p. 639—658. 1893.

Andeutungen von Kraftlinien, auch wenn, bei voller Beanspruchung der Influenzmaschine, weit lebhaftere Luftkonvektionen stattfanden als bei den der Fig. 9 zu Grunde liegenden Versuchen. — Auch die Mitwirkung von Elektrisierungen der Hartgummioberfläche, entstanden etwa durch das Trockenreiben der Platte, ist auszuschließen, da die gleichen Figuren auch nach Entladung der Oberfläche mittels Flamme erhalten wurden.

Nach allem bisher dabei Beobachteten scheint jedoch folgendes die Entstehungsursache zu sein: von den durch die Hartgummiunterlage isolierten Sandkörnchen werden zunächst die den Polen anliegenden mit den entsprechenden Elektrizitäten geladen, nach der Ladung von den Elektroden abgestoßen und mit großer Geschwindigkeit längs der elektrischen Kraftlinien fortbewegt bis zum Aufprallen an andere, entfernter liegende Sandpartikelchen, die *nicht* elektrisch geladen, wodurch ein Austausch von Ladungen bewirkt wird; dieses Spiel, an dem stets eine große Zahl von Sandkörnchen gleichzeitig beteiligt ist, wiederholt sich nun in äußerst schneller Aufeinanderfolge, und zwar, wie man direkt sehen kann, von den Polen aus rasch bis zur Mitte der Platte fortschreitend und so etappenweise Ladungen von Pol zu Pol transportierend, ganz ähnlich wie bei dem „elektrischen Kugeltanz“. Anfänglich geschehen diese Bewegungen *nur* in Richtung der elektrischen Kraftlinien; auf kurze Strecken hin also in nahezu *parallelen* Bahnen. Diese oszillierenden Bewegungen der Sandpartikelchen haben aber dann zur Folge, daß ähnliche *hydrodynamische* Kraftwirkungen zu stande kommen, wie sie zuerst Bjerknes¹⁾ für den Fall der Bewegungen zweier Kugeln in einer Flüssigkeit berechnet hat; also Abstoßung in Richtung der Bewegung (in unserem Falle: in Richtung der elektrischen Kraftlinien) und Anziehung senkrecht dazu. — Teilchen, die bereits in den Niveaulinienrichtungen nebeneinander liegen, bleiben auch während der Oszillationen (die in Kraftlinienrichtungen geschehen) in dieser gegenseitigen Lage, oder nähern sich, falls sie ein wenig voneinander entfernt sind, bis zum gegenseitigen Berühren; hintereinander gelegene Teilchen dagegen werden

1) V. Bjerknes, Rep. der reinen und angewandten Mathematik 1. p. 264. 1876; G. Kirchhoff, Mechanik p. 251. 1877. W. H. R. G.

in den Kraftlinienrichtungen voneinander entfernt und nebeneinander in Niveaulinien gelagert. — Anordnungen senkrecht zu den Bewegungsrichtungen bleiben also bestehen, während dazu parallele (die im ersten Momente sich andeutungsweise bildenden elektrischen Kraftlinien) zerstört und ihre Teilchen in die Reihen der „stabilen“ Anordnungen gebracht werden.

Ob dieser Erklärungsversuch der Wirklichkeit entspricht, müssen weitere Untersuchungen entscheiden.

Über eine Reihe merkwürdiger und interessanter Erscheinungen, die bei Anstellung der im vorliegenden beschriebenen Versuche beobachtet wurden, insbesondere über das unter gewissen Bedingungen statthabende Auftreten von Figuren in den Suspensionen, die außerordentlich ähnlich jenen zuerst von P. de Heen¹⁾ und neuerdings auch von R. H. Weber²⁾ beschrieben sind, soll später berichtet werden.

Am Schlusse dieser Arbeit drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. F. Richarz für die Anregung zu dieser Arbeit und für die bei der Anfertigung derselben in liebenswürdigster Weise erteilten Ratschläge meinen herzlichsten Dank zu sagen.

E. Verzeichnis der auf der Taf. IV wiedergegebenen Darstellungen des elektrischen Kraft- und „Niveau“-Linienverlaufes.

Fig. 1. Verlauf elektrischer Kraftlinien zwischen zwei kleinen, geladenen Kugeln.

Darstellung erhalten mittels Suspension von *Glycin* in *Terpentinöl*; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

Fig. 2. Elektrische Kraftlinien zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; Demonstration eines homogenen Feldes und der „Randwirkungen“.

Mittels Suspension von Chininsulfat in *Terpentinöl*; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

1) P. de Heen, Bull. de l'inst. de Phys. de l'université de Liège. Ser. 2. Prem. fasc. p. 589. 1900.

2) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 6. p. 96—108. 1901.

Fig. 3. Dasselbe Feld, einseitig „gestört“ durch genäherten Leiter (Metallklotz *M*); Hinbiegen der elektrischen Kraftlinien nach *M*.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 4. Metallring zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; Einbiegen der Kraftlinien in den Ring; Schirmwirkung des Metallringes gegen das Innere hin.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 5. Hartgummiring zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; fehlende Schirmwirkung (Kraftlinien auch im Innern des Ringes); geringes Ausbiegen der Linien, wegen der etwas niedrigeren Dielektrizitätskonstante des Hartgummis gegenüber jener der Suspension.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 6. Einbiegen der Kraftlinien in ein Dielektrikum von höherer Dielektrizitätskonstante (Methylalkohol in einer Glaskugel; beide von geringerer Leitfähigkeit als die benutzte Suspension; Glaskugel zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten).

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 7. Ausbiegen bei eingesetztem Dielektrikum von niedrigerer Dielektrizitätskonstante (Glaskugel mit Luft gefüllt).

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 8. Elektrische Kraftlinien zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten.

Dargestellt unter Benutzung einer Suspension von Holzkohlepulver in geschmolzenem Paraffin; Kraftlinienbild, fixiert durch das Erstarren des Paraffins; ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 9. „Elektrische Niveaulinien“ zwischen zwei geladenen Kugeln (ihre Aufsetzstellen sind durch \times markiert); ca. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.; vgl. p. 838—840.

(Eingegangen 28. März 1903.)

7. Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung; von W. König.

(Hierzu Taf. V, Figg. 1–5.)

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich den Nachweis geführt, daß in transversal schwingenden Glasplatten zwei Arten von Doppelbrechung auftreten, eine von der Krümmung der Platten, und eine von den scherenden Kräften herrührende. In den Schwingungsbäuchen ist nur die erstere, in den Schwingungsknoten nur die letztere Wirkung vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen treten beide Wirkungen gleichzeitig ein. Ich habe auch in jener Abhandlung bereits darauf hingewiesen, daß diese Wirkungen doppelter Art bei statischer Verbiegung einer Platte ebenfalls auftreten. In der bisherigen Literatur über diesen Gegenstand sind, soweit meine Kenntnis reicht, nur die Erscheinungen der ersten Art beschrieben worden, die von der Krümmung herrührenden Interferenzstreifen, die Brewster zuerst beobachtet hat.²⁾ Die schwächeren Wirkungen der scherenden Kräfte scheint man nicht beachtet zu haben. Aber gerade in ihnen enthüllt sich das feinere Spiel der elastischen Kräfte bei der Biegung, wie es de Saint-Venant in seiner exakten Theorie der Biegung behandelt hat, und die genaue Untersuchung der optischen Erscheinungen kann daher ein vortreffliches und bequemes Hilfsmittel abgeben, um die aus den Theorien der Elastizität gewonnenen Resultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Von diesen Gesichtspunkten aus will ich im folgenden versuchen, eine genaue Beschreibung der Erscheinungen zu geben und den Zusammenhang der optischen mit den elastischen Vorgängen darzulegen. Leider bildet bei diesen Untersuchungen die schwache Doppelbrechung, welche die Platten infolge mangelhafter Kühlung auch in nicht gebogenem Zustande besaßen³⁾, ein sehr störendes Moment. Während sie bei der starken Doppelbrechung infolge der Plattenkrümmung sich nur in einer geringfügigen Ortsveränderung der einzelnen Interferenzstreifen geltend macht,

1) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 1–40. 1901.

2) D. Brewster, Phil. Trans. 1816. I. Teil. p. 156–178.

3) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 2. 1901.

führt sie in den Gebieten schwacher Doppelbrechung zu beträchtlichen Verzerrungen der aus den elastischen Deformationen folgenden Erscheinungen, und beeinträchtigt die Deutlichkeit und Genauigkeit des Vergleiches zwischen den optischen und den elastischen Vorgängen. Der quantitativen Prüfung dieses Zusammenhanges ist durch die beschriebene Eigentümlichkeit des benutzten einfachen Spiegelglases, zu der sich noch eine weitere Störung durch das Vorhandensein von Schlierenflächen parallel zur Plattenebene gesellte, eine ziemlich enge Grenze gesteckt. Eine exakte quantitative Prüfung würde die Anwendung von fehler- und spannungsfreiem Glase verlangen, das nur mit unverhältnismäßig großen Kosten zu beschaffen sein würde. Zunächst genügen die unvollkommenen Glasplatten, um den Charakter der Erscheinungen kennen zu lernen.

Wie bei den schwingenden Platten die beiden Arten der Doppelbrechung in den Bäuchen und Knoten getrennt voneinander auftreten, so sind auch bei statischer Verbiegung Fälle möglich, in denen nur die eine oder nur die andere Art der Doppelbrechung an bestimmten Stellen des Stabes auftritt. Diese beiden Fälle sind wichtig, weil sie gestatten, die Eigentümlichkeiten jeder Art von Doppelbrechung für sich zu untersuchen. Ich bespreche zunächst diese Fälle und dann den allgemeinen Fall, in dem beide Formen der Doppelbrechung gleichzeitig auftreten.

1. Gleichförmige Biegung.

Man kann einen Stab so biegen, daß gar keine scherennden Kräfte in ihm auftreten, sondern nur die von der Krümmung bedingten Zug- und Druckspannungen in Richtung der Längserstreckung des Stabes. Man erreicht dies in bekannter Weise dadurch, daß man den Stab über zwei Schneiden biegt, wie es Fig. 1 andeutet.

Zwischen den Schneiden tritt dann der geforderte Zustand ein. In jedem Element dieses Teiles

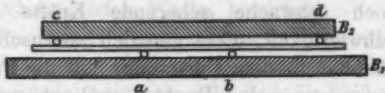


Fig. 1.

des Stabes werden die Längsspannungen durch die gleichen Spannungen der Nachbarelemente aufrecht erhalten. Der Spannungszustand ist daher in der ganzen Längserstreckung dieses Teiles des Stabes der gleiche, und die Biegunskurve

dieses Teiles muß ein Kreis sein. Betrachtet man eine in dieser Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols, so treten, wenn die Polarisationssebenen der Nicols 45° mit der Längserstreckung der Platte bilden, die Brewsterschen Streifen auf und müssen innerhalb des ganzen, kreisförmig gebogenen Teiles der Platte mit unveränderlichem Abstand von der Mittellinie verlaufen. Dreht man aber die Nicols so, daß ihre Polarisationssebenen senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Platte liegen, so muß die Platte vollkommen dunkel erscheinen. Der Versuch bestätigte dies.

Die Platte wurde in der durch Fig. 1 dargestellten Weise gebogen. Auf das starke Brett B_1 werden die Lager a und b aufgelegt, entweder scharfe Metall- oder Holzschneiden, oder runde Metallstäbe, darüber die Glasplatte, auf diese in der Nähe ihrer Enden zwei entsprechende Lager und über diese das starke Brett B_2 . Dieses wird entweder in der Mitte belastet, oder die beiden Bretter werden durch eine Schraubzwinge zusammengeschraubt. Zwischen den mittleren Schneiden a und b ist dann bei gekreuzten Nicols in der ersten Lage (45° gegen die Horizontale) der gleichmäßige Verlauf der Interferenzerscheinung sehr schön wahrzunehmen. Schwieriger ist es, die Biegung der Platte so fein zu regulieren, daß die Platte in der zweiten Nicollage vollkommen dunkel bleibt. Im allgemeinen war das bei den oben erwähnten Formen der Auflager niemals vollständig zu erreichen; vielmehr blieb bei Drehung der gekreuzten Nicols auch in der Stellung der größten Dunkelheit noch eine wenn auch schwache Interferenzerscheinung in Gestalt eines dem Brewsterschen ähnlichen Streifensystems wahrnehmbar, wenigstens bei Beobachtung mit einer intensiven Lichtquelle (Auerlicht). Diese Erscheinung rührt davon her, daß auch zwischen den mittleren Auflagern noch schwache scherende Kräfte vorhanden sind. Die Schwierigkeit, diese gänzlich auszuschließen, hat ihren Grund offenbar in dem Umstande, daß die Platte auf jedem Auflagerpaare nur in drei Punkten aufliegt, und daß bei der zufälligen Lage dieser Auflagerpunkte die beiden Kräftepaare, die die Biegung bewirken, im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen werden. Auch Überdecken der Auflager in ihrer ganzen Länge mit Leder- oder Gummipplatten verbesserte die Unregelmäßigkeit nicht wesentlich. Dagegen gelang es, sie durch

folgenden Kunstgriff zu vermeiden. Auf jedes Auflager wurden an zwei bestimmten Punkten schmale Gummischiebchen gelegt; diese bildeten nun die Angriffspunkte der auf die Platte wirkenden Kräfte. Sie konnten so orientiert werden, daß die entsprechenden Angriffspunkte für alle vier Auflager in einer zur Längsrichtung der Platte parallelen Vertikalebene lagen. Auf diese Weise gelang es, eine vollkommen scherungsfreie Biegung zwischen a und b durch genau zentrale oder symmetrische Belastung von B_2 zu erhalten. Die Platte blieb dann fast in der ganzen Erstreckung zwischen a und b vollkommen dunkel. Eine Störung der oben beschriebenen Art trat jetzt nur noch in der Nähe der Auflager ein, wo ja die Bedingungen der Theorie nicht streng erfüllt sind.

2. Biegung mit Wendepunkt.

Während der soeben erörterte Fall der Erscheinung im Schwingungsbauche entspricht, kann man die Erscheinungen im Schwingungsknoten statisch nachahmen, indem man die Platte in der durch Fig. 2 veranschaulichten Weise verbiegt. Hier wird die Platte an den Auflagern m_1, m_3, m_5 nach oben, an den Stellen m_2 und m_4 nach unten gedrückt. Zwischen m_2

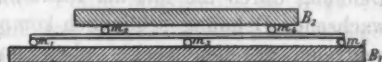


Fig. 2.

und m_3 und ebenso zwischen m_3 und m_4 findet ein allmählicher Übergang von der Krümmung im einen, zur Krümmung im anderen Sinne statt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null; die Brewsterschen Streifen verschwinden hier. Bei dieser Art der Verbiegung treten scherende Kräfte auf, die in den Wendepunkten allein zur Geltung kommen und hier eine Doppelbrechung von genau der gleichen Art, wie in den Knotenpunkten der schwingenden Platte, bewirken.

Als die in der beschriebenen Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols in der 45° -Lage an der Stelle des Wendepunktes untersucht wurde, zeigte es sich, daß die beiden neutralen Mittellinien des rechten und des linken Streifensystems sich an der Knotenstelle nicht zu einer die ganze Höhe der Platte ausfüllenden Dunkelheit vereinigten. Sie bogen vielmehr aneinander vorbei so, wie es die photographische Aufnahme der Erscheinung, Fig. 1, Taf. V erkennen läßt. Zur

richtigen Beurteilung ist es erforderlich hinzuzufügen, daß der betrachtete Wendepunkt der zwischen m_2 und m_3 gelegene war, d. h. daß die nach oben konvex gekrümmten Teile des Stabes zur Rechten, die nach unten konvex gekrümmten zur Linken der betrachteten Knotenstelle liegend zu denken sind. Das beobachtete Verhalten der Platte erklärt sich aus ihrer natürlichen Doppelbrechung. Die Platte verhält sich in der Mitte so, als wäre sie dauernd in ihrer Längsrichtung gedehnt, an den Rändern aber umgekehrt so, als wäre sie in der Längsrichtung zusammengedrückt. Daher bleibt an der Knotenstelle die Mitte hell und schließt sich an die durch die Krümmung hervorgerufenen Dehnungsgebiete rechts oben und links unten an. Dieses zentrale Dehnungsgebiet der natürlichen Doppelbrechung der Platte wird oben und unten durch neutrale Streifen begrenzt. Da wo diese die Knotenlinie schneiden, erscheint die letztere dunkel. Unmittelbar an den Rändern aber tritt wieder Aufhellung ein infolge der natürlichen Kompression der Masse, die hier herrscht. Diese wird aber in den Gebieten der durch die Krümmung hervorgebrachten Dehnung durch die mit der Entfernung von dem Wendepunkte wachsende Dehnung schließlich kompensiert; daher greifen die neutralen Streifen rechts oben und links unten in diese Dehnungsgebiete über.

Bei entgegengesetzter Verbiegung der Platte, wie sie etwa in dem rechts von m_3 gelegenen Wendepunkte statthat, ist natürlich auch der Verlauf der Streifen der entgegengesetzte. Daher waren diese Streifen bei den schwingenden Platten nicht wahrzunehmen, da sie sich während der Schwingung abwechselnd nach oben und nach unten bogen. Sie sind daher nicht zu verwechseln mit denjenigen Streifen, die ich auf p. 29 und 30 meiner Abhandlung über die schwingenden Platten beschrieben habe. Diese traten auf, wenn die Nicols aus ihrer 45° -Stellung nach rechts oder links herausgedreht wurden; sie hatten für entgegengesetzte Verbiegungen der Platte die gleiche Lage und erklären sich, wie ich an der genannten Stelle angedeutet habe, aus dem Zusammenwirken der scherennden Kräfte und der Längsspannungen. Auch bei der statischen Verbiegung machten sich diese Wirkungen geltend. Wurden die gekreuzten Nicols aus der 45° -Lage nach links herausgedreht (Fig. 3 b, der ersten Abhandlung), so blieben zwar

die Enden der Streifen an den Plattenrändern in ihrer Lage — an diesen Stellen ist eben die Doppelbrechung überhaupt gleich Null. Die übrigen Teile aber, besonders die gekrümmten Teile in der Nähe der Knotenlinie, verschoben sich, und zwar am linken Streifen nach links oben, am rechten nach rechts unten, und diese Erscheinung trat in beiden Wendepunkten in demselben Sinne ein. Im linken bewirkte sie nur eine Verflachung der Streifen, im rechten dagegen eine vollständige Umkehrung des Verlaufes, indem der linke Interferenzstreifen sich nach links oben, der rechte nach rechts unten krümmte. Die Streifen hatten dann also im rechten und im linken Wendepunkt sehr nahe das gleiche Aussehen. Es ist verständlich, daß eine Erscheinung dieser Art auch bei den Schwingungen mit ihren wechselnden Verbiegungen sichtbar war. Wurden die Nicols nach rechts aus ihrer 45° -Lage herausgedreht, so war in beiden Wendepunkten die Wirkung natürlich umgekehrt. Ich werde auf die genauere Theorie dieser Erscheinungen unten noch einmal zurückkommen.

Werden endlich die gekreuzten Nicols parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte eingestellt, so zeigt die Stelle des Wendepunktes und ihre Umgebung eine gleichmäßige, nach den Rändern hin abnehmende Erhellung, etwa bis zum Weiß der ersten Ordnung. Es herrscht hier also in der ganzen Quererstreckung der Platte eine Doppelbrechung, deren Achsen 45° mit der Längsrichtung der Platte bilden. Durch Zwischenschalten von Glimmerplatten oder von gepreßtem Glas ließ sich leicht feststellen, daß die Dehnungsrichtung (die positive Achse der Doppelbrechung“, vgl. p. 29 der früheren Abhandlung) die positiven Quadranten, d. h. die Quadranten des Dehnungsgebietes halbiert. Diese Erscheinungen charakterisieren die optischen Wirkungen der Schubkraft. An ihnen läßt sich nun auch mit Leichtigkeit die Frage entscheiden, wie sich die Schubkräfte über den Querschnitt in Richtung der Dicke verteilen. Zu dem Ende wurde zwischen dem Analysator und der Glasplatte, dicht vor der letzteren, ein Gipskeil eingeschaltet, der so geschnitten war, daß seine Achsen 45° mit der Kante des Keils bildeten. Er wurde so vor der Platte aufgestellt, daß die Interferenzstreifen vertikal, d. h. in Richtung der Dicke über die Platte hinweggingen. Um der größeren Schärfe wegen den Nullstreifen beobachten zu können,

wurde über den Gipskeil noch eine Glimmerplatte in Subtraktionsstellung gelegt. Fig. 2 a, Taf. V gibt eine photographische Aufnahme dieses Streifens bei ungebogener Platte, Fig. 2 b, Taf. V bei starker Deformation. Es ist auf das deutlichste sichtbar, daß die Doppelbrechung an den Rändern der Platte Null, in der Mitte am größten ist. Auch das von de Saint-Venant aufgestellte quadratische Gesetz für die Abnahme der scherenden Kraft von der Mitte nach den Rändern zu¹⁾ läßt sich ohne Zwang auf die Gestalt des Interferenzstreifens in Fig. 2 b, Taf. V anwenden.

Die von der Krümmung herrührende Doppelbrechung ist aber nicht bloß im Vertikalschnitt des Wendepunktes, sondern außerdem längs der ganzen Erstreckung des Stabes in der neutralen Mittellinie gleich Null. Die von den scherenden Kräften hervorgebrachte Doppelbrechung kommt daher auch in der neutralen Mittellinie, ebenso wie im Wendepunkte vollständig rein zur Erscheinung. Wenn man die Platte zwischen gekreuzten Nicols in der zuletzt beschriebenen Lage untersucht, so sieht man, wie sich die im Wendepunkte erscheinende Erhellung nach beiden Seiten hin in die neutrale Mittellinie hinein fortsetzt bis zu den Auflagerpunkten. Je zahlreicher mit der Annäherung an die Stellen stärkster Krümmung die Brewsterschen Interferenzstreifen werden und je schmaler infolgedessen die neutrale Mittellinie wird, um so schmaler wird auch diese zentrale Erhellung bei der zweiten Nicollage. Ein Vergleich der in Fig. 3, Taf. V wiedergegebenen Aufnahmen der beiden Erscheinungen für drei verschiedene Stellen eines gebogenen Stabes läßt dies deutlich erkennen. Noch schärfer springt diese Wirkung der scherenden Kräfte in die Augen, wenn man einen nach dem Schema der Fig. 1 gebogenen Stab an der Stelle seiner mittleren Auflager untersucht. Fig. 4 a, Taf. V zeigt die Erscheinung für die zweite Nicollage am Auflager *a*. Hier scheidet der Vertikalschnitt des Auflagers das äußere (linke) Gebiet der Biegung unter dem Einfluß der scherenden Kräfte von dem inneren (rechten) Gebiete der kreisförmigen, schublosen Biegung. Infolgedessen erscheint die neutrale Mittellinie auf der linken Seite des Bildes hell bis zum Vertikalschnitt des Auflagers; hier bricht die Wirkung der Schubkraft plötzlich ab.

1) Vgl. die mehrfach genannte Abhandlung von mir p. 37.

Schaltet man den oben bereits benutzten Gipskeil bei dieser Untersuchung zwischen Glasplatte und Analysator, so zeigt der Interferenzstreifen in der Mitte eine Ausbuchtung entsprechend der Doppelbrechung in der neutralen Mittellinie. Fig. 4b, Taf. V zeigt auf der linken Hälfte diese Erscheinung, während der Interferenzstreifen auf der rechten Hälfte, im Gebiet der schublosen Biegung, ohne derartige Störung verläuft.

Untersucht man die optische Wirkung der scherenden Kräfte einmal zwischen den Lagern a und c , das andere Mal zwischen b und d , so sind die Erscheinungen an beiden Stellen die gleichen, nur mit vertauschtem Sinn der optischen Achsen. Bei Beobachtung mit dem Gipskeil ist daher die Richtung der Ausbuchtung des Interferenzstreifens an den beiden Stellen entgegengesetzt, wie Fig. 5a und 5b, Taf. V zur Anschauung bringt. Ebenso ist natürlich das Vorzeichen dieser Doppelbrechung das entgegengesetzte zu beiden Seiten eines Auflagers bei Biegung über eine einzige Kante oder im Falle der Fig. 2.

Die Größe der Ausbuchtung des Interferenzstreifens gibt endlich ein Maß für die Stärke der von der Scherung hervorgerufenen Doppelbrechung an den verschiedenen Punkten eines gebogenen Stabes. Mißt man die Größe der Ausbuchtung auf einer über den Gipskeil gelegten Teilung, so findet man, daß dieser optische Effekt der scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung von einem Auflager bis zum nächsten konstant ist. Auch dies steht mit der Theorie der Biegung im Einklang. Denn die Konstanz der Schubkraft zwischen zwei Auflagern ist ja die Bedingung, aus der man die Gleichung des gebogenen Stabes beim statischen Problem herleitet. Ist

$$P = \frac{Ed^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

die Schubkraft (vgl. Gleichung (2) der früheren Abhandlung), so ist

$$\mu \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

die Gleichung des schwingenden Stabes,

$$O = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

die Gleichung des statisch verbogenen Stabes.

Hier tritt nun auch der Unterschied in der Beanspruchung der Platte bei der statischen Verbiegung und bei der Schwin-

gung auf das deutlichste hervor. Denn bei der schwingenden Platte hat die von der Schubkraft erzeugte Doppelbrechung im Knoten ein Maximum und nimmt nach den Bäuchen zu stetig bis zu Null ab. Um diesen Unterschied genau zu formulieren, will ich die entsprechenden Formeln für die Gestalt der statisch verbogenen und der schwingenden Platte und für die Größe der Schubkraft in beiden Fällen nebeneinander stellen, wobei die statische Verbiegung der Platte nach dem Schema der Fig. 2 so ausgeführt zu denken ist, daß die Abstände benachbarter Auflager gleich den Abständen benachbarter Schwingungsbäuche der schwingenden Platte sein sollen. Die Gleichung des gebogenen Stabes hat die allgemeine Lösung:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ich beschränke die Betrachtung auf einen Teil des Stabes zwischen zwei Auflagern. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems soll im Wendepunkte oder im Knoten liegen; die Stellen der Auflager, die Bäuche, sollen in den Abständen $\pm x_0$ vom Knoten liegen und die Verbiegung y soll in ihnen die Größe $\pm a$ haben. Endlich soll in den Bäuchen $\partial y / \partial x = 0$ sein, und im Wendepunkte soll die Krümmung, die in erster Annäherung durch $\partial^2 y / \partial x^2$ ausgedrückt wird, sich nicht sprunghaft, sondern stetig ändern. Aus diesen Bedingungen folgt $B = 0$ und $D = 0$,

$$C = -3Ax_0^2 \quad \text{und} \quad A = -\frac{a}{2x_0^3},$$

so daß die Gestalt der Platte durch die Gleichung gegeben ist:

$$y = -\frac{a}{2x_0^3}x^3 + \frac{3}{2}\frac{a}{x_0}x,$$

oder, wenn man $x/x_0 = \xi$ setzt

$$y = \frac{3}{2}a\xi - \frac{a}{2}\xi^3,$$

wobei ξ zwischen -1 und $+1$ zu nehmen ist. Die Krümmung der Platte hat dann den Betrag

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{3a}{x_0^3}\xi$$

und die Schubkraft hat den konstanten Wert

$$P = -\frac{E d^3 a}{4 x_0^3}.$$

Die Form der schwingenden Platte ist durch die in der früheren Abhandlung entwickelten Gleichungen gegeben. Wenn man die x nicht, wie es dort geschehen, von dem einen Ende, sondern von der Mitte der Platte aus rechnet, so kann man den Ausdruck für y auf die Form bringen:

$$y = \frac{a}{1 + \sqrt{\cos p}} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \frac{\sqrt{\cos p}}{2} \left(e^{+\frac{px}{l}} + e^{-\frac{px}{l}} \right) \right\} \sin 2\pi n t,$$

wobei a die Amplitude in der Mitte der Platte und p für den Fall der Schwingung mit vier Knoten sehr nahe gleich $7\pi/2$ ist. Da infolgedessen $\cos p$ eine sehr kleine Größe ist, so ist, wenigstens für kleine x , das zweite Glied in der Klammer zu vernachlässigen. Man wird also zwischen dem mittleren Schwingungsbauch und den benachbarten Knoten die Gestalt der Platten im Maximum ihrer Ausbiegung sehr nahe als eine Sinusform ansehen können, d. h.

$$y = a \sin \frac{\pi}{2} \xi,$$

wenn ξ vom Knoten bis zum Bauch von 0 bis 1 anwächst. Dementsprechend variiert also auch die Krümmung nach dem Sinusgesetz:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{3a}{x_0^2} \sin \frac{\pi}{2} \xi$$

und die Schubkraft nach der Cosinusformel:

$$P = -\frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{E d^3 a}{4 x_0^3} \cos \frac{\pi}{2} \xi.$$

Aus diesen Formeln folgt endlich, daß bei gleicher Größe der Verbiegung (d. h. gleichem a) die Krümmung im Bauch der schwingenden Platte um $\pi^2/12$ ($= 0,822$) kleiner ist als über den Auflagern bei statischer Verbiegung, und daß andererseits die scherende Kraft im Knoten der schwingenden Platte um $\pi^2/24$ ($= 1,293$) größer ist als im Wendepunkt der statisch gebogenen. Wenn auch diese feineren quantitativen Unterschiede bei den Beobachtungen nicht zum Ausdruck kamen, so war doch die charakteristische Verschiedenheit in dem Verlauf der durch die Schubkraft bedingten Doppelbrechung längs der neutralen Mittellinie auf das deutlichste wahrnehmbar.

Es sollen nun drittens, die optischen Erscheinungen in denjenigen Teilen eines gebogenen Stabes untersucht werden, in denen scherende Kräfte mit den Zug- oder Druckkräften gleichzeitig auftreten.

3. Allgemeiner Fall. Zusammenwirken von Längsspannung und Scherung.

Die Versuche bestätigen, wie wir gesehen haben, die Forderung der Theorie, daß die scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung des Stabes zwischen zwei Auflagern konstant sind. In jedem Vertikalschnitt werden die scherenden Kräfte dann entsprechend der de Saint-Venantschen Formel so verteilt sein, wie es die optische Untersuchung für die Knotenlinie unmittelbar veranschaulicht. Daraus folgt, daß in allen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes Längsspannung und Scherung gleichzeitig auftreten müssen, mit alleiniger Ausnahme des oberen und unteren Randes, an dem die Scherung gleich Null ist, sowie der Knoten- und der neutralen Mittellinie, in denen die Längsspannung gleich Null ist.

Es ist zunächst zu untersuchen, zu welcher Resultante sich die gleichzeitig auftretenden Spannungs- und Schubkräfte zusammensetzen werden. Wir gehen von den bekannten Gleichungen für die elastischen Spanningskräfte im Innern eines Körpers aus¹⁾:

$$T \cdot \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{21} \cos q + t_{31} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \alpha = t_{12} \cos p + t_{22} \cos q + t_{32} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \rho = t_{13} \cos p + t_{23} \cos q + t_{33} \cos r.$$

Hier bedeuten π , α , ρ die Winkel der Kraft T mit den Koordinatenachsen, p , q , r die Winkel der Normale derjenigen Fläche, auf die die Kraft T pro Flächeneinheit wirksam ist. In unserem Falle sind von Normalspannungen nur t_{11} , von Tangentialkräften nur $t_{21} = t_{12}$ vorhanden. T liegt daher in der XY -Ebene. Nehmen wir auch die Normale der Fläche in dieser Ebene an, d. h.

$$\cos r = 0, \quad \cos q = \sin p,$$

so lauten die Gleichungen

$$T \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{12} \sin p,$$

$$T \sin \pi = t_{12} \cos p,$$

folglich

$$T^2 = t_{11}^2 \cos^2 p + t_{12}^2 + t_{11} t_{12} \sin 2p$$

und

$$\operatorname{ctg} \pi = \frac{t_{11}}{t_{12}} + \operatorname{tg} p.$$

1) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper p. 14.

Für die Richtung der Hauptdrucke, für die $\pi = p$ ist, ergibt sich daraus die Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{2 t_{12}}{t_{11}}.$$

Setzt man

$$p = p_m + v,$$

d. h. zählt man die Winkel der Normale nicht von der x -Achse, sondern von der Hauptdruckachse aus, die den Winkel p_m mit der x -Achse bildet, so ist allgemein:

$$T^2 = \frac{1}{2} t_{11}^2 + t_{12}^2 + \frac{1}{2} t_{11}^2 \sqrt{1 + \frac{4 t_{12}^2}{t_{11}^2}} \cos 2 v,$$

und die Hauptdrucke sind

$$\text{für } v = 0 \quad T_1 = \frac{t_{11}}{2} + \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2},$$

$$\text{für } v = \frac{\pi}{2} \quad T_2 = \frac{t_{11}}{2} - \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2}.$$

Das gegebene System von Kräften ist also gleichwertig einer Zugspannung T_1 in der durch den Winkel p_m bestimmten Richtung und einer Druckspannung T_2 senkrecht dazu. Diese Richtungen sind die Achsen der Doppelbrechung. Die Größe der Doppelbrechung ist durch die Differenz der zugehörigen Hauptdilatationen bestimmt. Bedeutet wieder E den Elastizitätsmodul, μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation, so berechnen sich die Hauptdilatationen α und β nach den Gleichungen:

$$\alpha = \frac{T_1}{E} - \frac{\mu T_2}{E},$$

$$\beta = \frac{T_2}{E} - \frac{\mu T_1}{E},$$

und daraus die Doppelbrechung, entsprechend der in der früheren Arbeit entwickelten Formel¹⁾

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(\alpha - \beta) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} \sqrt{t_{11}^2 + 4 t_{12}^2}. \end{aligned}$$

1) l. c. p. 83.

Um aus diesen allgemeinen Gleichungen die speziellen Formeln für Größe und Richtung der Doppelbrechung in den verschiedenen Punkten des gebogenen Stabes zu erhalten, sind für t_{11} und t_{12} die aus der Theorie der Biegung folgenden besonderen Werte einzusetzen:

$$t_{11} = E \cdot y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$t_{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{E \cdot d^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right).$$

Nehmen wir im besonderen den oben behandelten Fall einer Biegung mit Wendepunkt, so folgt aus der dort entwickelten Gleichung für den gebogenen Stab:

$$t_{11} = - \frac{3 a E}{x_0^3} x \cdot y,$$

$$t_{12} = - \frac{3}{8} \frac{a \cdot E \cdot d^2}{x_0^3} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right),$$

Danach sind an einem Punkte des Stabes, der durch die Koordinaten x und y bestimmt ist, die Winkel p_m und $p_m + \pi/2$, welche die Achsen der Doppelbrechung mit der Längsachse des Stabes bilden, durch die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d^2}{4 x y} \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2} \right).$$

Da die y nur im Verhältnis zur Dicke des Stabes in diese Formel eingehen, so möge noch die Bezeichnung η für das Verhältnis $y : d/2$ eingeführt werden. Die Gleichung lautet dann

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d}{2 x \cdot \eta} (1 - \eta^2).$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, daß die Lage der Achsen an jeder Stelle unabhängig von der Größe der Verbiegung der Platte ist. Sie haben daher auch in der schwingenden Platte während der Schwingung eine konstante Lage, woraus sich die in der früheren Arbeit p. 30 und 31 erwähnten Beobachtungen erklären. An derselben Stelle der früheren Arbeit habe ich durch eine Zeichnung (Fig. 4), den Verlauf der Achsenrichtungen in der Umgebung des Knotens angedeutet. Das genaue Gesetz dieses Verlaufes ist nunmehr durch die obige Gleichung gegeben. In der Knotenlinie ($x=0$)

und in der Mittellinie ($\eta = 0$) ist $p_m = 45^\circ$. Von diesen Lagen aus findet beim Übergang in die Gebiete der Dehnung oder Zusammendrückung eine allmähliche Drehung der Achsenrichtungen statt.

Faßt man einen bestimmten Vertikalschnitt ins Auge, entsprechend einem bestimmten Werte von x , so vollzieht sich diese Drehung in der oberen Hälfte in dem einen, in der unteren in dem entgegengesetzten Sinne, vom Winkel 45° in der Mittellinie an bis zum Winkel 0° bez. 90° am Rande der Platte, d. h. für $\eta = \pm 1$. In der Nähe der Knotenebene ist diese Drehung eine sehr allmähliche entsprechend den geringen Werten, die die Längsspannungen hier besitzen. In dem Vertikalschnitt z. B., der von der Knotenlinie um die Dicke der Platte absteht ($x = d$), gibt die Formel folgende Wertepaare von η und p_m in der einen Plattenhälfte.

| | | | | | | | | | | |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-----|
| $\eta = 0$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $p_m = 45^\circ$ | 39,3° | 33,7° | 28,3° | 23,2° | 18,4° | 14,0° | 10,0° | 6,4° | 3,0° | 0° |

Je weiter man sich von der Knotenebene entfernt, um so schneller vollzieht sich von der Mittellinie aus der Abfall zu kleinen Werten von p_m . In einem Abstände z. B., der das 20fache der Dicke beträgt, würde man die Wertepaare haben:

| | | | | |
|------------------|-----|------|------|------|
| $\eta = 0$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | etc. |
| $p_m = 45^\circ$ | 7° | 3,3° | 2,2° | etc. |

An den Stellen starker Krümmung beschränken sich also die merklichen Abweichungen von dem Verhalten kreisförmig gebogener Platten auf den mittelsten Teil der Platte. Qualitativ bestätigen sich diese Folgerungen der Theorie ganz gut an der Erfahrung. Die genaue quantitative Prüfung der Formel stößt auf Schwierigkeiten infolge der Unvollkommenheit der benutzten Glasplatten. Der Verlauf der p_m läßt sich ja nur in den Gebieten mit einiger Sicherheit messend verfolgen, in denen die Längsspannungen noch relativ geringe Werte haben. Unter diesen Umständen aber machen sich neben den durch die Biegung hervorgerufenen Längsspannungen die natürlichen Spannungszustände der Platte geltend und bedingen beträchtliche Abweichungen von dem von der Formel geforderten Verlaufe der Erscheinung. Man könnte versuchen, diesem

Einfluß durch ein Zusatzglied zu dem Ausdruck für t_{11} in unseren Gleichungen Rechnung zu tragen, indem man für den Verlauf dieser natürlichen Spannungen rein empirisch eine Formel aufstellt. Wie schon mehrfach erwähnt, ist die Platte in der Mitte in gedehntem, am Rande in gedrücktem Zustande, wenn man die Längsrichtung der Platte als Dehnungs- und Druckrichtung nimmt. Die neutralen Zonen liegen etwa bei $\frac{1}{4}d$ und $\frac{3}{4}d$, also bei $\eta = \frac{1}{2}$. Es mögen versuchsweise die natürlichen Spannungen dargestellt werden durch die Formel

$$t'_{11} = \vartheta(1 - 4\eta^2).$$

Dann geht die Gleichung für p_m über in die Form

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta + D(1 - 4\eta^2)}.$$

Darin ist gesetzt:

$$C = \frac{d}{2x},$$

$$D = \frac{2\vartheta \cdot x_0^3}{8\alpha E d x}.$$

Die Größe von D läßt sich in einfacher Weise aus Messungen der Doppelbrechung ableiten. Es sei Δ_0 die Phasendifferenz infolge der natürlichen Längsspannung in der Mitte der Platte, die man am ungebogenen Stabe direkt messen kann. Sie ergab sich zu 0,04. Es sei ferner Δ_r die Phasendifferenz, die in dem betrachteten Vertikalschnitt am Rande der Platte bei der Biegung gemessen wird. Dann ist

$$D = \frac{\Delta_0}{\Delta_r \pm 3\Delta_0},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Plattenrand, an dem Δ_r gemessen wird, konvex oder konkav gebogen ist. Bei der Kleinheit von Δ_0 genügt es, im allgemeinen $D = \Delta_0/\Delta_r$ zu setzen.

Es wurden nun Messungen folgender Art angestellt: Wenn man die Platte im weißen Licht zwischen gekreuzten Nicols beobachtet, so wandert bei einer gemeinsamen Drehung der beiden Nicols der schwarze Mittelstreifen. Er liegt in jedem Augenblicke an derjenigen Stelle, an der die Achsenrichtungen mit den Polarisationsrichtungen der beiden Nicols zusammenfallen. Als Analysator wurde ein Nicol mit Teilkreis benutzt. Dieser wurde auf bestimmte Winkel seiner Polarisations-

richtung zur Längsrichtung der Platte eingestellt; dann wurde der Polarisator auf Dunkelheit gestellt und nun der Abstand des schwarzen Streifens vom Rande der Platte gemessen. Um Parallaxenfehler zu vermeiden, wurde das Streifensystem aus der Entfernung mit einem Fernrohr mit Okularskala beobachtet. Als Lichtquelle diente ein Auerbrenner. Die Beobachtungen wurden für neun Nicolstellungen in sämtlichen vier Quadranten angestellt, und aus den vier sich wiederholenden Lagen des schwarzen Streifens der Mittelwert genommen. Aus diesen mittleren Abständen des schwarzen Streifens von dem einen Plattenrande und der gleichzeitig auf der Okularskala gemessenen ganzen Dicke der Platte wurden die Werte der η berechnet. An diesen Beobachtungen wurde schließlich die Formel in der Weise kontrolliert, daß die Formel nach η aufgelöst und die Werte von η aus den Werten von p_m und den Konstanten C und D des beobachteten Vertikalschnittes berechnet wurden. Im allgemeinen genügte für diese Berechnung die abgekürzte Formel

$$\eta = \frac{C}{\operatorname{tg}^2 p_m} - D.$$

Ich gebe zwei in dieser Weise ausgeführte Beobachtungsreihen.

1. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 6,7$ cm vom Knotenpunkte. Die Dicke der Platte betrug 6,2 mm. Die Gangdifferenz am Rande der Platte betrug eine Wellenlänge. Daraus folgen die Konstanten

$$C = \frac{d}{2x} = 0,046, \quad D = 0,04.$$

Die zu den nachstehend angegebenen Werten von p_m durch die Beobachtung gefundenen und die nach der Formel mit obigen Konstanten berechneten Werte von η sind:

| p_m | 5 | 10 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 85° |
|-----------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\eta_{\text{beob.}}$ | 0,17 | 0,10 | 0,04 | -0,01 | -0,03 | -0,05 | -0,13 | -0,19 | -0,29 |
| $\eta_{\text{ber.}}$ | 0,21 | 0,08 | 0,02 | -0,01 | -0,04 | -0,07 | -0,12 | -0,17 | -0,27 |

2. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 11$ cm. Die Gangdifferenz am Plattenrande betrug zwei Wellenlängen. Also

$$C = 0,028, \quad D = 0,02.$$

Es wurden beobachtet und berechnet:

| p_m | 5 | 10 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 80 | 85° |
|-----------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\eta_{\text{beob.}}$ | 0,14 | 0,07 | 0,02 | -0,02 | +0,01 | -0,02 | -0,07 | -0,08 | -0,17 |
| $\eta_{\text{ber.}}$ | 0,14 | 0,06 | 0,03 | -0,00 | -0,02 | -0,04 | -0,07 | -0,10 | -0,18 |

Daß sich diese Beobachtungen durch die Formel ohne Berücksichtigung der natürlichen Doppelbrechung der Platte nicht darstellen lassen würden, geht schon aus der Unsymmetrie des Verlaufes der Zahlen zu beiden Seiten des Mittelwertes ($p_m = 45^\circ$) hervor. Mit der angenommenen Form der Korrektur ergibt sich eine ganz befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung.

Nach dieser Darstellung der Achsenlagen erübrigt es schließlich noch, die Stärke der Doppelbrechung in ihrer Abhängigkeit von x und η zu behandeln. Aus der allgemeinen Gleichung für Δ und den Spezialgleichungen für t_{11} und t_{12} folgt

$$\Delta = \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(1 + \mu) \frac{3 a d}{2 x_0^3} \sqrt{x^2 \eta^2 + \frac{d^2}{4} (1 - \eta^2)^2}.$$

Bezeichnen wir wieder die nur von den Längsspannungen herrührende Phasendifferenz am Rande (für $\eta = 1$) im Vertikalschnitt x mit Δ_r , außerdem die nur von den Schubkräften herrührende, von x unabhängige Phasendifferenz in der Mitte (für $\eta = 0$) mit Δ_m , so läßt sich Δ übersichtlicher in der Form schreiben:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_r^2 \eta^2 + \Delta_m^2 (1 - \eta^2)^2}.$$

Aus dieser Formel ist zunächst zu ersehen, daß Δ nur dann Null wird, wenn gleichzeitig $\eta = 1$ und $\Delta_r = 0$ ist. Die Doppelbrechung verschwindet also nur in denjenigen Punkten, in denen der Plattenrand von einer Knotenebene geschnitten wird. An allen übrigen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes ist stets Doppelbrechung vorhanden. Der Wert der Phasendifferenz Δ hat im allgemeinen seinen kleinsten Betrag in der Mitte (für $\eta = 0$); wenigstens gilt dies, solange $\Delta_r > \sqrt{2} \Delta_m$ ist. Wird bei Annäherung an den Knoten $\Delta_r < \sqrt{2} \Delta_m$, so rückt der Ort der kleinsten Phasendifferenz allmählich nach dem Rande, den er in der Knotenebene erreicht.

Noch einfacher läßt sich der Ausdruck für Δ schreiben, wenn man die Kenntnis der früher definierten Winkelwerte dazu nimmt:

$$\Delta = \frac{\Delta_r \cdot \eta}{\cos 2 p_m}.$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, die den Verlauf der Phasendifferenzen in einem kreisförmig gebogenen Stab bei gleicher Biegung (d. h. gleichem Δ_r) angibt:

$$\Delta' = \Delta_r \cdot \eta',$$

so sieht man, daß die gleichen Phasendifferenzen bei nicht kreisförmiger Biegung schon bei geringeren Werten der η erreicht werden. Denn bei gleichem Betrage von Δ und Δ' ist

$$\eta = \eta' \cos 2 p_m.$$

Daraus folgt

$$\eta' - \eta = 2 \eta' \sin^2 p_m.$$

In einiger Entfernung vom Knoten sind wegen des schnellen Abfalles der p_m (vgl. oben p. 855) diese Differenzen nur sehr klein.

Von besonderem Interesse ist die Verteilung der Intensität in dem Interferenzbilde der Platten zwischen gekreuzten Nicols. Bedeutet J die Amplitude des auf die Platte auffallenden Lichtes, d. h. die Amplitude nach dem Durchgang durch den Polarisator, sind die Nicols gekreuzt und bildet die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes den Winkel α mit der Längsrichtung der Platte, so ist die Amplitude des aus dem Analysator austretenden Lichtes gegeben durch die Gleichung:

$$A = J \cdot \sin(2 p_m - 2 \alpha) \sin \pi \Delta.$$

Für die beiden Hauptlagen der Nicols verlaufen daher die Erscheinungen folgendermaßen.

a) Nicolebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte

$$A = - J \cdot \cos 2 p_m \sin \pi \Delta.$$

Bei kreisförmiger Biegung würde die Formel entsprechend lauten:

$$A = - J \cdot \sin \pi \Delta'.$$

In letzterem Falle durchläuft Δ' die Werte von 0 bis Δ_r ; die Intensität des Lichtes ist in der Mitte Null und durchläuft nach dem Rande hin eine Reihe Maxima und Minima, entsprechend der Periodizität von $\sin \pi \Delta'$. Bei nicht kreisförmiger Biegung ist die Erscheinung im wesentlichen die gleiche. Zwar ist in der Mitte Δ nicht gleich 0, sondern gleich Δ_m ; dafür ist aber $\cos 2 p_m = 0$; in der Mitte ist also die Intensität gleich Null. Mit wachsendem η steigt $\cos 2 p_m$ sehr schnell auf Werte nahe gleich 1, wenn man in einiger Entfernung vom Knoten beobachtet. Folglich kommt die Periodizität von $\sin \pi \Delta$ in

gleicher Weise wie bei kreisförmiger Biegung zur Geltung; nur würden die Minima um den geringfügigen Betrag $2\eta \cdot \sin^2 p_m$ nach der Mitte hin verschoben sein.

b) Nicolebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte. In diesem Falle gilt die Formel:

$$A = J \cdot \sin 2p_m \cdot \sin \pi \Delta,$$

während bei kreisförmiger Biegung $A = 0$ sein würde. Da $\sin 2p_m$ in der Mitte gleich 1 ist und mit wachsendem η schnell abnimmt, wenn man nicht in der Nähe des Knotens beobachtet, so beschränkt sich die sichtbare Erscheinung auf den mittleren Teil der Platte. In der Mitte ist $A = J \cdot \sin \pi \Delta_m$, also Helligkeit. Wächst bei schwacher Biegung $\sin \pi \Delta$ mit wachsendem η langsam an, so sieht man in der Mitte einen breiten hellen Streifen. Wird die Biegung stärker, so daß das erste Minimum von $\sin \pi \Delta$ in denjenigen Bereich hineinrückt, in dem $\sin 2p_m$ noch merkliche Werte besitzt, so wird der Streifen dadurch schmaler, aber zugleich wegen der Steigerung von Δ_m heller. Wird endlich die Biegung so stark, daß mehrere Minima und Maxima von $\sin \pi \Delta$ in den Bereich der noch merklichen Werte von $\sin 2p_m$ fallen, so werden neben dem mittleren hellen Streifen noch diese Minima und Maxima mit schnell abnehmender Helligkeit sichtbar. Die gleichen Überlegungen sind auf die drei Aufnahmen Fig. 3a, 3b und 3c, Taf. V anzuwenden. Nur ist hier zu beachten, daß nicht an derselben Stelle beobachtet und die Biegung verändert wurde, sondern die Biegung konstant war und der Beobachtungspunkt verändert wurde. Es ist also für diese drei Aufnahmen Δ_m konstant; C aber um so kleiner, und damit die Änderung von p_m um so schneller, je größer Δ ist. Unter diesen Umständen erhält man bei Fig. 3a einen breiten, bei Fig. 3b einen schmäleren hellen Streifen, während bei Fig. 3c die Maxima und Minima von $\sin \pi \Delta$ bis in das Gebiet der noch merklichen Werte von p_m hineinrücken.

Es mögen endlich noch diejenigen Erscheinungen erklärt werden, welche in der dritten Serie der Abbildungen der Fig. 3, Taf. V dargestellt sind. Sie sind dadurch erhalten, daß bei der soeben besprochenen zweiten Hauptlage der Nicols zwischen Platte und Analysator der oben beschriebene Gipskeil eingeschoben ist. Der Versuch war ursprünglich angestellt, um

die Größe der von der Schiebung herrührenden Doppelbrechung in der Mitte der Platte zu messen. Der Interferenzstreifen des Gipskeiles zeigt aber, außer der zentralen, von Δ_m herrührenden stärkeren Verschiebung noch eine Reihe schwächerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten, deren Lagen mit den Lagen der Interferenzstreifen für die erste Nicollage in offenbarem Zusammenhange stehen. Ich will versuchen, auch die Theorie dieser Erscheinungen wenigstens anzudeuten.

Das auf die Platte fallende Licht schwinde in der X -Achse mit der Amplitude J . Beim Durchgang durch die Platte zerlegt es sich in die Komponenten P_1 und P_2 , die nach den Achsen der Doppelbrechung an der durchstrahlten Stelle der Platte gerichtet sind, mit den Koordinatenachsen also den Winkel p_m bilden. Nach dem Durchgange durch die Platte werden diese Komponenten infolge der verschiedenen Verzögerung, die sie in der doppelbrechenden Platte erfahren, die Form haben:

$$P_1 = J \cdot \cos p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_1),$$

$$P_2 = -J \cdot \sin p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_2).$$

In dem Gipskeil wird jede Komponente wiederum zerlegt nach den Achsen der Doppelbrechung im Gips, die Winkel von 45° mit den Koordinatenachsen einschließen. Wir bilden zunächst diese Komponenten des auf den Gipskeil einfallenden Lichtes:

$$R_1 = P_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right),$$

$$R_2 = -P_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right).$$

Diese lassen sich auf die Form bringen

$$R_1 = \frac{J}{\sqrt{2}} A_1 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_1\right),$$

$$R_2 = -\frac{J}{\sqrt{2}} A_2 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_2\right)$$

Nach dem Durchgang durch den Gipskeil haben diese Schwingungen die weiteren Verzögerungen ζ_1 und ζ_2 erfahren. Im Analysator werden sie schließlich auf die Y -Achse reduziert,

die mit den Richtungen von R_1 und R_2 Winkel von 45° bildet. Das aus dem Analysator tretende Licht ist daher gegeben durch die Summe

$$\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{2}}$$

und läßt sich auf die Form bringen:

$$\frac{1}{2} J \cdot B \cdot \sin 2\pi \left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \beta \right),$$

wobei B , auf das es im folgenden allein ankommt, durch die Gleichung bestimmt ist:

$$B^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos 2\pi (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \zeta_1 - \zeta_2).$$

Für A_1 und A_2 , ε_1 und ε_2 aber ergeben die Zwischenrechnungen folgende Werte:

$$A_1^2 = 1 + \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$A_2^2 = 1 - \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon_1 = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon_2 = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta.$$

Daraus folgt schließlich

$$(I) \quad B^2 = 2 - 2 \sqrt{1 - \sin^4 \pi \Delta \cdot \sin^2 4 p_m} \cdot \cos 2\pi (\varepsilon + \zeta).$$

In dieser Gleichung bedeutet $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ die Phasendifferenz, die die beiden Komponenten R_1 und R_2 vor ihrem Eintritt in den Gipskeil besitzen; $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ ist die Phasendifferenz, die der Gipskeil hinzufügt. Da ζ wegen der keilförmigen Gestalt der Gipsplatte längs der X -Achse stetig variiert, so kann zu jedem Werte von ε ein Wert $\zeta = -\varepsilon$ angegeben werden, der den $\cos(\varepsilon + \zeta) = 1$ macht. Es fragt sich, wie verlaufen die Werte von ε und welches sind die zugehörigen Werte von B ? Für ε ergibt sich aus den obigen Gleichungen die Formel:

$$(II) \quad \operatorname{tg} 2\pi \varepsilon = \frac{\sin 2 p_m \cdot \sin 2\pi \Delta}{\cos^2 2 p_m + \sin^2 2 p_m \cos 2\pi \Delta}.$$

Die Diskussion dieser Formel und der Formel für B ergibt folgendes:

1. In der Mitte, $\eta = 0$, wo $\Delta = \Delta_m$, $p_m = 45^\circ$ ist, folgt aus (II) $\varepsilon = \Delta_m$ und aus (I)

$$B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\varepsilon + \zeta),$$

also $B = 0$ für $\zeta = -\Delta_m$. Das entspricht der Streifenverschiebung in der Mitte.

2. Da, wo $\Delta = 1, 2, 3$ ist, d. h. für die Mitten der dunklen Interferenzstreifen bei gekreuzten Nicols in der ersten Hauptlage, ist ebenfalls $B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\varepsilon + \zeta)$, zugleich aber nach (II) $\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon = 0$. Das Licht ist an diesen Stellen nach dem Durchgange durch die Glasplatte wieder geradlinig polarisiert in der ursprünglichen Richtung. Die Interferenzstreifen des Gipskeiles haben daher ihre ursprünglichen Lagen, die sie ohne die Glasplatte zwischen den gekreuzten Nicols haben würden.

3. Da, wo $\Delta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc. ist, d. h. für die Mitten der hellen Interferenzstreifen, gilt ebenfalls die Gleichung $\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon = 0$. Hier ist aber

$$B^2 = 2 (1 - \cos 4 p_m \cdot \cos 2 \pi (\varepsilon + \zeta)).$$

An diesen Stellen ist das Licht nach dem Durchgange durch die Glasplatte ebenfalls wieder geradlinig polarisiert, aber seine Schwingungsrichtung ist gegen die X -Axe um den (im allgemeinen kleinen) Winkel $2 p_m$ gedreht. Daher liegt auch an diesen Stellen ein Minimum der Intensität an der Stelle des unverschobenen Streifens, ist aber nicht gleich Null, sondern gleich $J^2 \sin^2 2 p_m$. In der Tat kann man wahrnehmen, daß der Streifen an diesen Stellen, wenigstens in der Nähe der Mitte, wo $\sin 2 p_m$ noch merkliche Werte hat, nicht völlig verschwindet (vgl. Fig. 5, Taf. V).

4. Danach hat also der Streifen keine Verschiebung in den Punkten, denen die Werte $\Delta = k/2$ zukommen. Dazwischen wird der Streifen Verschiebungen aufweisen, deren Größe nach (II) durch den Betrag von ε bestimmt ist. Für die Fälle, in denen die Erscheinung in der durch Fig. 3, Taf. V dargestellten Weise auftritt, ist es, wie schon mehrfach hervorgehoben, charakteristisch, daß p_m von der Mitte aus sehr schnell abnimmt. Daher wird sich für Punkte, die nicht in unmittelbarer Nähe der Mitte liegen, die Gleichung (II) vereinfachen zu

$$\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon = \sin 2 p_m \cdot \sin 2\pi \Delta.$$

Daraus folgt, daß ε durchgehends nur kleine Werte haben und daß es zwischen positiven und negativen Werten hin- und herschwanken wird, und zwar werden die Grenzwerte an-
genähert für

$$\sin 2\pi \Delta = \pm 1,$$

d. h. für $\Delta = 2k + 1/4$ erreicht werden.

In den Punkten, für die $\Delta = 2k + 1/4$ ist, wird

$$B^2 = 2 \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \cdot \cos 2\pi(\varepsilon + \zeta) \right\},$$

also an der Stelle des um $\zeta = -\varepsilon$ verschobenen Streifens

$$B^2 = 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \right)$$

und bei Berücksichtigung der Kleinheit von p_m

$$B^2 = \sin^2 2 p_m \cdot \cos^2 2 p_m.$$

Die Intensität ist also in diesen Minimumstellen ebenfalls nicht streng gleich Null, aber jedenfalls sehr klein. Die Lage des Minimums, d. h. die Streifenverschiebung ist für diese Stellen gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp \frac{\sin 2 p_m}{\cos^2 2 p_m},$$

wobei das $-$ Zeichen für $k = 1, 3, 5 \dots$, das $+$ Zeichen für $k = 2, 4, 6 \dots$ gilt. Über die Größe dieser Streifenverschiebung im Verhältnis zur Verschiebung Δ_m läßt sich ein angenähertes Urteil auf Grund folgender Näherungsrechnung finden. Da

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta}$$

ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp C \cdot \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} \sqrt{\eta^2 + C^2(1 - \eta^2)^2}$$

oder unter Berücksichtigung des Umstandes, daß C eine kleine Größe ist

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp C \frac{1 - \eta^2}{\eta}.$$

Für C aber kann man auch Δ_m/Δ_r setzen und für $\Delta_r \times \eta$ in erster Annäherung den nur wenig größeren Wert Δ . Dann ist also

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mp \frac{\Delta_m}{2\pi\Delta} (1 - \eta^2) \\ &= \mp \frac{2\Delta_m}{(2k+1)\pi} (1 - \eta^2), \end{aligned}$$

wobei

$$\eta^2 = \frac{(2k+1)^2}{16\Delta_r^2}$$

zu setzen ist. Also ist z. B. für $k = 1$

$$\varepsilon = -\frac{2 A_m}{3 \pi} \left(1 - \frac{9}{16 A_r^2} \right) = -0,21 \cdot \left(1 - \frac{0,56}{A_r^2} \right) A_m,$$

für $k = 2$

$$\varepsilon = +\frac{2 A_m}{5 \pi} \left(1 - \frac{25}{16 A_r^2} \right) = +0,13 \cdot \left(1 - \frac{1,56}{A_r^2} \right) A_m,$$

für $k = 3$

$$\varepsilon = -\frac{2 A_m}{7 \pi} \left(1 - \frac{49}{16 A_r^2} \right) = -0,091 \cdot \left(1 - \frac{3,06}{A_r^2} \right) A_m$$

etc. Dabei würde z. B. für die in Fig. 3, Taf. V wieder-
gegebenen Aufnahmen $A_r = \frac{3}{2}, = 3$ und $= 6$ zu setzen sein.

Für $k = 0$ oder $A = \frac{1}{4}$ gelten diese Betrachtungen nicht
mehr. Hier, in der Nähe der Mitte, würden die abgekürzten
Formeln keine Berechtigung mehr haben. An dieser Stelle
tritt aber auch überhaupt kein Grenzwert für ε mehr auf.
Nähert man sich von der Stelle, für die $A = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 0$ ist,
der Mitte, so wächst wegen des hier erfolgenden starken An-
wachsens von $2 p_m \varepsilon$ andauernd über den Wert, den es für
 $A = \frac{1}{4}$ erreicht, hinaus, bis zu dem Werte A_m , den es für
 $\eta = 0$ erlangt.

Vergleicht man in Fig. 3, Taf. V die rechtsstehenden Auf-
nahmen mit dem Gipskeil mit den linksstehenden Aufnahmen
für die erste Nicollage, so findet man den im vorstehenden
entwickelten Charakter der Erscheinung in den wesentlichen
Zügen an den Tatsachen bestätigt. Der Interferenzstreifen des
Gipskeils zeigt außer der stärkeren Verschiebung in der Mitte
eine Reihe kleinerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten hin.
Die Spitzen dieser Zacken fallen angenähert auf diejenigen
Stellen, die in den linksstehenden Interferenzbildern an der
Grenze zwischen den hellen und dunklen Interferenzlinien liegen,
d. h. da wo $A = 2k + 1/4$ ist; und zwar liegen die nach
derselben Seite wie A_m gerichteten Zacken auf den äußeren
Rändern der dunklen Streifen des linken Bildes, d. h. da, wo
 $A = \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}$ ist, die nach der entgegengesetzten Seite gerichteten
auf den inneren Rändern, d. h. da, wo $A = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}$ ist. End-
lich entsprechen auch die Größen dieser Zacken im Verhältnis
zur mittleren Verschiebung A_m — wenigstens der Größen-
ordnung nach — dem, was man nach den obigen Formeln
darüber aussagen könnte.

Die vorliegende Untersuchung gibt eine vervollständigte Lösung des Problems der in einem gebogenen Glasstabe auftretenden Doppelbrechung. Sie bildet damit zugleich ein Beispiel für die Möglichkeit, die Spannungsverteilung in einem elastisch beanspruchten Körper auch in ihren feineren Einzelheiten auf optischem Wege zu untersuchen, ein Verfahren, das mir ebenso nützlich zu sein scheint als Mittel zur Demonstration des Zusammenhanges der Kräfte in den bekannten Fällen elastischer Deformationen wie als Untersuchungsmethode für andere komplizierte Probleme der Elastizität. Allerdings hat die Anwendbarkeit der Methode ihre Grenze in dem Umstande, daß sie eigentlich nur für zweidimensionale Fälle gilt. Denn sie gibt eine vollkommen eindeutige Bestimmung der Kräfte nur, wenn auf dem Wege, den der Lichtstrahl im Körper durchläuft, die Kräfte und damit die Doppelbrechung überall die gleichen sind. Auch in dem hier behandelten Falle ist diese Bedingung nicht erfüllt. Die Kräfte variieren nach der Theorie de Saint-Venants auch in derjenigen Richtung, die auf der Biegungsebene senkrecht steht und in der der Lichtstrahl die Platte durchsetzt. Der in den obigen Darlegungen benutzte Wert für die Schiebungskräfte ist nur der Mittelwert, der sich aus der Integration über die durchstrahlte Dicke ergibt. Diese Kräfte variieren auf dem Wege des Lichtstrahles von Punkt zu Punkt, und mit ihnen werden die Größen der Doppelbrechung und die Lage ihrer Achsen von Punkt zu Punkt variieren. Das Problem ist also in Wahrheit noch wesentlich verwickelter, als es hier dargestellt ist. Vielleicht würden genauere Messungen, als ich sie mit den mir zu Gebote stehenden Glasplatten anstellen konnte, in demjenigen Gebiete, in dem Schubkräfte und Längsspannungen zusammenwirken, systematische Abweichungen aus den oben entwickelten Formeln ergeben, deren Erklärung eine Berücksichtigung dieser weiteren Komplikation verlangen würde. Da die Rechnungen außerordentlich verwickelt sind, nehme ich davon Abstand, die Untersuchung nach dieser Richtung weiter zu führen.

Greifswald, März 1903.

(Eingegangen 31. März 1903.)

8. *Nachtrag zu meiner Arbeit
über die „Fortpflanzung magnetischer Wellen
in Eisenzylindern“¹⁾; von J. Zenneck.*

Erst als der Druck der genannten Mitteilung schon beendet war, bemerkte ich, daß die Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern schon von J. J. Thomson²⁾, wenn auch in wesentlich anderer Weise, behandelt worden ist.

a) Der *Ansatz* von Hrn. Thomson ist der strenge Maxwell'sche; die einzige Voraussetzung dabei ist konstante Permeabilität auch für den Eisenzylinder. Bei meinem Ansatz handelt es sich um eine Übertragung von Beziehungen, deren Richtigkeit nur für den geschlossenen magnetischen Kreis nachgewiesen werden kann, um Beziehungen, in denen der magnetische Widerstand (w_m bez. w'_m) und Selbstinduktionskoeffizient (p_m) pro Längeneinheit und eine Größe c_m , die der elektrischen Kapazität pro Längeneinheit analog ist, eine Rolle spielt. Der Ansatz von Hrn. Thomson verhält sich also zu dem meinigen wie etwa auf elektrischem Gebiet der Ansatz von Sommerfeld³⁾ für die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs Drähten zu dem an Kirchhoff sich anschließenden häufig gebrauchten Ansatz, in dem mit Widerstand, Selbstinduktionskoeffizienten und Kapazität pro Längeneinheit operiert wird.

b) Hr. Thomson hat die Berechnung durchgeführt für zwei Fälle, die mit zwei von mir behandelten Spezialfällen im wesentlichen übereinstimmen. Sie sind charakterisiert durch den Betrag der Größe

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{8 V^2}} \\ &= r \sqrt{\frac{\pi \cdot \pi n \lambda \mu}{2}} \text{ C.G.S.-Einheiten,} \end{aligned}$$

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 10. p. 845. 1903.

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism p. 303. Oxford 1893.

3) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 243. 1898.

worin

r = Zylinderradius $\equiv a$ bei Thomson,

n = Wechselzahl $\equiv \frac{p}{\pi}$ " "

λ = Leitvermögen des Zylinders $\equiv \frac{1}{\sigma}$ " "

μ = Permeabilität des Zylinders,

$\bar{\mu}$ = Permeabilität des Zylinders, bezogen auf Luft $\equiv \frac{\mu}{4\pi}$ " "

V = vom Maßsystem abhängige Konstante.

c) Im ersten Grenzfall, x klein gegen 1, findet Hr. Thomson

$$\beta^1) = \frac{2}{r\sqrt{\bar{\mu}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(g^2\bar{\mu})}}^2),$$

$$\gamma^1) = 0,$$

Mein Ansatz lieferte

$$\beta = \sqrt{c_m \cdot w_m},$$

$$\gamma = \frac{\pi n p_m}{2 w_m} \sqrt{c_m w_m},$$

oder, da in diesem Falle annähernd

$$w_m' = w_m = \frac{1}{\pi r^2 \bar{\mu}} = \frac{4}{r^2 \bar{\mu}} \text{ C.G.S.-Einheiten,}$$

$$\pi n p_m = x^2 w_m^3),$$

so folgte:

$$\beta = \frac{2}{r\sqrt{\bar{\mu}}} \cdot \sqrt{c_m},$$

$$\gamma = \frac{x^2}{2} \cdot \beta.$$

Der Wert für β wird also mit dem Thomsonschen identisch, wenn man setzt:

$$(1) \quad c_m = \frac{1}{\log(g^2\bar{\mu})}.$$

1) Die Bedeutung von β und γ ergibt sich daraus, daß der magnetische Induktionsfluß Q der in der positiven X-Richtung fortschreitenden Welle in der Form

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\beta x} \cdot e^{i(\pi n t - \gamma x)}$$

angesetzt wurde.

2) $\log g$ = Gauss'sche Konstante = 0,577. \log hier und im folgenden $\equiv \log_{\text{nat}}$.

3) Die Gleichung

$$\pi n p_m = \frac{r^2 \alpha}{4} \cdot w_m$$

(l. e. p. 848) steht aus Versehen für

$$\pi n p_m = \frac{r^2 \alpha}{8} \cdot w_m.$$

Daß bei Hrn. Thomson $\gamma = 0$ wird, rührt davon her, daß in seiner Berechnung Größen von der Ordnung κ^2 , in meiner erst von der Ordnung κ^4 gegen 1 vernachlässigt sind.

d) Im zweiten Grenzfall, κ groß gegen 1, erhält Hr. Thomson

$$\beta = \frac{2}{r} \cdot \frac{\left[\frac{r^2 \pi \cdot \pi n \lambda}{\mu} \right]^{1/4}}{\left\{ \log \left[g^2 \left(\frac{\mu}{\pi r^2 \cdot \pi n \lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r} \cdot \frac{\left[\frac{r^2 \pi \cdot \pi n \lambda}{\mu} \right]^{1/4}}{\left\{ \log \left[g^2 \left(\frac{\mu}{\pi r^2 \cdot \pi n \lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Das kann auf die Form gebracht werden

$$\beta = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}} \right)}} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}} \right)}} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Mein Ansatz ergab:

$$\beta = \sqrt{\pi n p_m} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},$$

$$\gamma = \sqrt{\pi n p_m} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

oder, da in diesem Falle

$$\pi n p_m = \kappa \cdot w_m,$$

da ferner

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt[4]{2} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt[4]{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

ist, so wird

$$\beta = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Das Resultat geht in das Thomsonsche über, wenn man

$$(2) \quad c_m = \frac{1}{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\pi \sqrt{2}} \right)}$$

in dasselbe einsetzt. Es bestätigt sich also vollkommen, daß in diesem Grenzfall $\beta : \gamma = \operatorname{ctg} \pi/8 = \text{ca. } 2,4$ wird, unabhängig von Permeabilität, Leitvermögen und Radius des Zylinders und der Wechselzahl der Schwingung.

e) Der Vergleich mit den Thomsonschen Formeln zeigt also, daß der einfache Ansatz in den beiden Grenzfällen alles das, was er überhaupt liefern kann, auch wirklich richtig liefert. Die Behandlung von Hrn. Thomson besitzt aber außer dem strengen Ansatz auch noch den praktischen Vorteil, daß sie die Größe c_m , von der die Streuung abhängt, ermittelt, während diese beim einfachen Ansatz unbestimmt bleibt.

Dieser praktische Vorteil darf aber nicht überschätzt werden. Denn einmal ist auch eine angenäherte Berechnung auf Grund des strengen Ansatzes nur in den besprochenen beiden Grenzfällen einigermaßen leicht durchführbar. Sobald π nicht sehr groß oder sehr klein gegen 1 ist, werden die mathematischen Schwierigkeiten sehr bedeutend. Und dann gilt der Thomsonsche Ansatz überhaupt nur für einen *einzelnen* Eisenzylinder. Bei Versuchen aber, bei denen es sich um dünnere Drähte handelt, ist es zum mindesten vorteilhaft, *Bündel* von Drähten, nicht einzelne Drähte zu verwenden. Dann aber werden die Grenzbedingungen so kompliziert, daß eine Durchführung der Rechnung auf Grund des strengen Ansatzes kaum möglich erscheint. Dann versagt der strenge Ansatz also vollkommen.

In diesen Fällen aber ist der einfache Ansatz ebenso leicht durchzuführen, wie in den besprochenen Grenzfällen.¹⁾ Da er selbst bei so komplizierten Verhältnissen, wie sie in dem I. c., § 3c, behandelten Falle vorlagen, jedenfalls qualitativ richtige Resultate lieferte, so ist er in allen den Fällen,

1) Die Werte von $\pi n p_m = w'_m$, die in den Gleichungen (6) I. c. auftreten, sind aus den Kurven der demnächst erscheinenden Arbeit „Elektrischer und magnetischer Widerstand bei Schwingungen“ zu entnehmen. Davon, ob es sich um einen einzelnen Draht oder ein Bündel handelt, hängt nur die Größe c_m ab.

in denen der strenge Ansatz auf sehr groÙe oder unüberwindliche Schwierigkeiten führt, als bequemes Aushülfsmittel zu betrachten.

f) Noch auf einen Punkt möchte ich aufmerksam machen. Die Größe c_m ergab sich im zweiten Grenzfall als

$$c_m = \frac{1}{\log \left(g^2 \cdot \frac{\bar{\mu}}{\pi \sqrt{2}} \right)}.$$

Die Größe $\pi \sqrt{2}$, mit der $\bar{\mu}$ dividiert erscheint, ist in diesem Fall nichts anderes als das Verhältnis der magnetischen Impedanz $\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}$ zum Ohmschen magnetischen Widerstand w_m . Die Gleichung (2) sagt also aus, daß die Streuung um so größer wird, je größer die magnetische Impedanz des Eisenkernes ist. Das gilt aber für *geschlossene* magnetische Kreise ganz allgemein. Es liegt deshalb nahe zu vermuten, daß es auch hier allgemein gilt und daß man demnach den allgemeinen Ausdruck für c_m aus dem speziellen in Gleichung (2) erhält, wenn man in Gleichung (2) den speziellen Wert $\pi \sqrt{2}$ durch den allgemeinen $\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} : w_m$ ersetzt. Man würde dann für einen einzelnen Eisenzy linder erhalten:

$$c_m = \frac{1}{\log \left(g^2 \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{w_m}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}} \right)}.$$

Für den ersten Grenzfall (c) ergibt diese Gleichung bis auf Größen von der Ordnung π^2

$$c_m = \frac{1}{\log (g^2 \bar{\mu})}$$

im Einklang mit dem oben festgestellten.

Straßburg i. Els., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 2. April 1903.)

**9. Bemerkung zur Notiz der Herren
V. Gabritschewski und A. Batschinski
über die sprechende Flamme;
von Ernst Ruhmer.**

Im Anschluß an die Notiz der Herren V. Gabritschewski und A. Batschinski erlaube ich mir die Bemerkung, daß es mir im Gegensatz zu analogen früheren Versuchen des Hrn. Simon¹⁾ bereits im Anfang des Jahres 1901 gelungen ist, die Flamme des Bunsenbrenners, überhaupt jede Flamme, nach Art der sprechenden Bogenflamme zum Sprechen zu bringen. Meine Versuchsanordnung, die in der Physikalischen Zeitschrift, 2. Jahrgang, Nr. 21, p. 325, u. a. auch in der Elektrotechnischen Zeitschrift, Heft 25, 1901 angegeben wurde, ist im wesentlichen mit der in Band 11, p. 223, 1903 dieser Annalen angegebenen Anordnung der Herren Gabritschewski und Batschinski identisch.

Z. Zt. Kiel, an Bord S. M. Schiff „Neptun“, 28. Mai 1903.

1) H. Th. Simon, Wied. Ann. **64**. p. 233. 1898.

(Eingegangen 29. Mai 1903.)

Berichtigungen

zu der Arbeit von A. Eichenwald, p. 1 und p. 421.

- Seite 9, Zeile 7 von unten muß es heißen: Ausschlag, statt: Anschlag.
 „ 11, „ 8 „ oben „ „ „ Ausschlüge, statt: Anschläge.
 „ 27, „ 5 „ unten „ „ „ — G , statt: — g .
 „ 432, „ 13 „ oben „ „ „ s. E , statt: E .
 „ 437, „ 14 „ „ „ „ „ $A_n.b.b'.B_m$, statt: $B_n.b'.b.A_n$.
 Seite 441, Zeile 14 von oben muß es heißen: den galvanischen Strömen,
 statt: den Wirkungen eines galvanischen Stromes.
 Seite 441, Zeile 18 von oben muß es heißen: die Bewegungen sowie auch
 die magnetischen Wirkungen der einzelnen bewegten Ladungen,
 statt: die Bewegungen und die magnetischen Wirkungen der
 bewegten Ladungen.

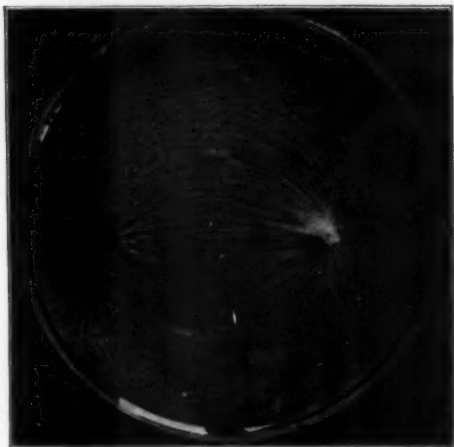


Fig. 1.

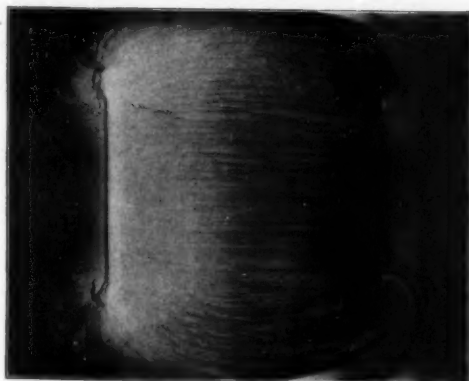


Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.

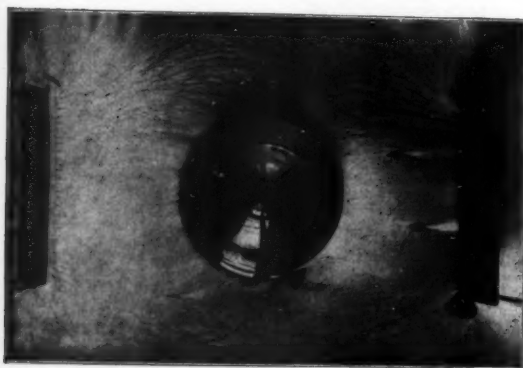


Fig. 6.

M. Seddig.



Fig. 7.

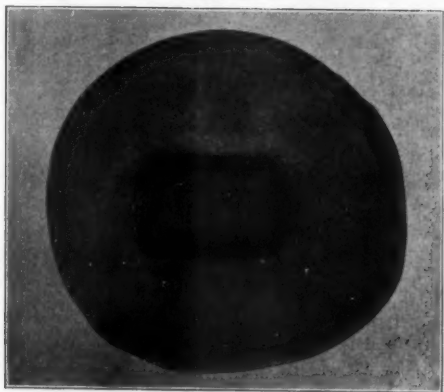


Fig. 8.

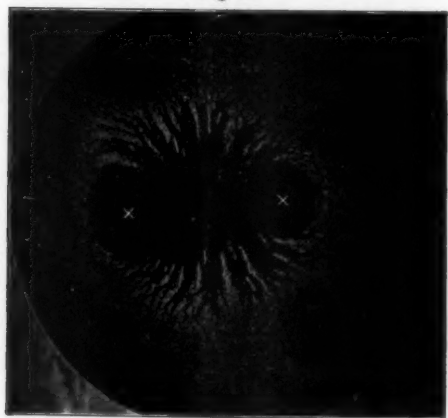


Fig. 9.

Fig. 1.



Fig. 2.

a

b



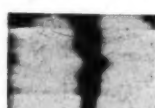
Fig. 3.

1. Nicolage.

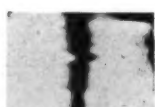
2. Nicolage.

2. Nicolage mit Gypскеil.

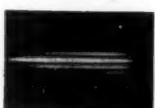
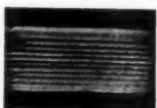
a



b



c



1

2

3

Fig. 4.



a



b

Fig. 5.

a



b



